บทที่ 2
ภาษาของคณิตศาสตร์ II
เซต, ความสัมพันธ์, ฟังก์ชัน, และจำนวนเต็ม

เซต, ความสัมพันธ์, ฟังก์ชัน, และจำนวนเต็มเป็นแนวความคิดพื้นฐานที่สำคัญยิ่งในคณิตศาสตร์. เนื่องจากผู้อ่านส่วนใหญ่ได้ศึกษามาพอสมควรแล้วในระดับมัธยม เนื้อหาในบทนี้โดยส่วนใหญ่จึงเป็นเพียงการทบทวนนิยามและหลักการสำคัญ รวมทั้งทำความตกลงเรื่องการใช้สัญลักษณ์ต่างๆ ที่จะใช้ในบทต่อๆไป.

2.1 เซต (Set)

มโนทัศน์พื้นฐานเกี่ยวกับเซต (Basic concepts of sets)

เราเรียกกลุ่มของวัตถุที่แตกต่างกันว่า **เซต** (set). ตัวอย่างเช่น กลุ่มของตัวอักษรที่เป็นสระในภาษาอังกฤษอันได้แก่ a, e, i, o, และ u เป็นเซตๆหนึ่ง. ถ้าเราตั้งชื่อเซตนี้ว่า A เราเขียนว่า A = {a,e,i,o,u}. เรากล่าวว่า เซต A ประกอบด้วยสมาชิก 4 ตัวคือ a, e, i, o, และ u. เราเขียน $i \in A$ แทนความหมาย “i เป็นสมาชิกของเซต A” หรือเขียนสั้นๆ ว่า “i อยู่ใน A”. เนื่องจากตัวอักษร p ไม่ใช่สมาชิกของเซต A เราเขียนว่า $p \notin A$.

เนื่องจากเราให้ความหมายของเซตเป็นกลุ่มของวัตถุ*ที่แตกต่างกัน* ดังนั้นการแจกแจงสมาชิกซ้ำกันไม่ถือว่ามีนัยสำคัญใดๆ นั่นคือเซต {1,2,3} คือเซตเดียวกับ {1,2,3,1}. นอกจากนี้อันดับของการแจกแจงสมาชิกในเซตก็ไม่มีนัยสำคัญใดๆเช่นกัน ดังนั้น เซต {1,2,3}, {3,1,2}, และ {1,3,2} ทั้งสามนี้ถือเป็นเซตเดียวกัน.

เราสามารถบรรยายนิยามของเซตๆ หนึ่งได้หลายวิธี โดยทุกวิธีมีจุดประสงค์ที่จะแสดงโดยไม่กำกวมว่าวัตถุใดเป็นหรือไม่เป็นสมาชิกของเซตนั้น. วิธีอย่างง่ายในบรรยายนิยามของเซตคือการเขียนแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของเซตภายในเครื่องหมายวงเล็บ {} ดังแสดงเป็นตัวอย่างในสองย่อหน้าที่แล้ว. ถ้าไม่ทำให้เกิดความกำกวม, เราสามารถใช้การบรรยายนิยามแบบแจกแจงนี้กับเซตที่มีจำนวนสมาชิกนับไม่ถ้วนได้ เช่นเราอาจเขียนแทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หารด้วย 3 ลงตัวด้วย {3,6,9,12,...}.

อีกวิธีหนึ่งที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในการบรรยายนิยามของเซตคือการเขียนบ่งบอกสมบัติของสมาชิกในเซตนั้นในรูปแบบมาตรฐานคือ

{x : x มีสมบัติ P}

ตัวอย่างเช่น เราอาจเขียนแทนเซต B = {3,6,9,12,...} ด้วย

{x : x เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 3 ลงตัว}.

และเราอาจเขียนแทนเซต C ที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดใน B ที่เป็นจำนวนเต็มคู่ได้ว่า

{$x \in B$: x เป็นจำนวนเต็มคู่}

ซึ่งก็คือเซต {6,12,18,24,...} หรือ {x : x เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 6 ลงตัว} นั่นเอง.

เซตที่ไม่มีสมาชิกเลยเราก็ถือว่าเป็นเซตเช่นกัน เรียกว่า **เซตว่าง** (empty set) เขียนแทนด้วย {} หรือ $\varnothing$. เซต {x : x เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $x^2 = 2$} เป็นตัวอย่างหนึ่งของเซตว่าง. เซตที่ไม่ใช่เซตว่าง (นั่นคือมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัว) เรียกว่า **เซตไม่ว่าง** (nonempty set).

เรามักใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่เช่น A, B, C แทนเซต และเพื่อความสะดวกเรามักจะกำหนดตัวอักษรพิเศษเพื่อใช้แทนเซตที่ถูกอ้างถึงบ่อย. หนังสือเล่มนี้จะใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ แทนเซตจำนวนนับ, เซตจำนวนเต็ม, เซตจำนวนเต็มบวก, เซตจำนวนเต็มลบ, เซตจำนวนตรรกยะ, และเซตจำนวนจริงตามลำดับ โดยเราจะถือว่า 0 เป็นจำนวนนับด้วย ดังนั้น $\mathbb{N}$ = {0,1,2,3, ...}. (ตำราบางเล่มไม่ถือว่า 0 เป็นจำนวนนับ)

บทนิยาม 1: ถ้าให้ A และ B เป็นเซตใดๆ, เรากล่าวว่า A เป็น**สับเซต** (subset) ของ B หรือกล่าวว่า B เป็น**ซูเปอร์เซต** (superset) ของ A ถ้า $\forall x\ ([x\in A] \longrightarrow [x\in B])$ (นั่นคือ สมาชิกทุกตัวใน A เป็นสมาชิกของ B)

เราใช้สัญลักษณ์ $A \subseteq B$ แทนข้อความ “A เป็นสับเซตของ B” และ $B \supseteq A$ แทนข้อความ “B เป็นซูเปอร์เซตของ A”

ข้อสังเกต : ในวรรณกรรมทางคณิตศาสตร์ การนิยามมโนทัศน์ใหม่ (เช่นสับเซต) จากมโนทัศน์ที่มีอยู่แล้ว (เช่นเซตและสมาชิกของเซต) มักจะเขียนอยู่ในรูป “เรากล่าวว่า..*มโนทัศน์ใหม่*.. ถ้า..*เงื่อนไขในรูปของมโนทัศน์ที่มีอยู่แล้ว*..” โดยใช้คำว่า ***ถ้า*** แทนความหมายของคำว่า ***เมื่อและต่อเมื่อ*** ดังที่เห็นในบทนิยาม 1. ดังนั้น ผู้อ่านควรทราบว่าบทนิยาม 1 มีความหมายเดียวกับข้อความ “A เป็นสับเซตของ B *เมื่อและต่อเมื่อ* $\forall x\ ([x\in A] \longrightarrow [x\in B])$” นั่นเอง.

ตัวอย่างเช่นเซตจำนวนเต็มเป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง (หรือเซตจำนวนจริงเป็นซูเปอร์เซตของเซตจำนวนเต็ม) เพราะจำนวนเต็มทุกตัวเป็นจำนวนจริง ดังนั้นเราเขียนได้ว่า $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (หรือ $\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Z}$).

จากนิยามของสับเซต เราได้ความจริงที่น่าสนใจสองประการคือ

1. *เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต.*
2. *เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง.*

ผู้อ่านควรพิสูจน์ความจริงทั้งสองนี้ด้วยตนเองจากนิยามของสับเซต.

ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ ที่มีสมาชิกเหมือนกัน, เรากล่าวว่า “เซต A เท่ากับเซต B”. วลีที่ว่า “มีสมาชิกเหมือนกัน” หมายความว่า *สมาชิกทุกตัวใน A เป็นสมาชิกของ B และสมาชิกทุกตัวใน B ก็เป็นสมาชิกของ A* ซึ่งก็คือการกล่าวว่า *A และ B เป็นสับเซตของกันและกัน*นั่นเอง. ดังนั้นเราจะใช้มโนทัศน์ของสับเซตมาให้นิยามที่ชัดเจนของ**การเท่ากันของเซต** (set equality) ได้ดังนี้:

บทนิยาม 2: การเท่ากันของเซต (set equality)
ถ้าให้ A และ B เป็นเซตใดๆ, เรากล่าวว่า **A เท่ากับ B** (เขียนแทนด้วย A = B) ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$.

ดังนั้น วิธีหนึ่งในการพิสูจน์ว่าเซตสองเซตเท่ากัน คือการแสดงให้เห็นว่าเซตทั้งสองเป็นสับเซตของกันและกัน.

ถ้าเราต้องการจะเน้นว่า $A \subseteq B$ แต่ $A \neq B$, เราจะกล่าวว่า A เป็น**สับเซตแท้** (proper subset) ของ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subset B$. ตัวอย่างเช่น สับเซตแท้ของเซต {a,b} มีทั้งหมด 3 เซต ได้แก่ $\varnothing$, {a}, และ {b}.

ถ้าเซตทุกเซตในบริบทที่เรากำลังพิจารณาเป็นสับเซตของเซตใดเซตหนึ่ง เราอาจเรียกเซตนั้นว่าว่าเป็น **เซตเอกภพ** (universal set) ของบริบทนั้น และเขียนแทนด้วย $\mathbb{U}$. กล่าวอีกแบบหนึ่งคือเซตเอกภพเป็นซูเปอร์เซตของเซตทั้งหมดในบริบทที่เรากำลังพิจารณา. ตัวอย่างเช่นเมื่อเรากำลังพิจารณาเรื่องราวของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ เราอาจจะให้เซตเอกภพเป็นเซตจำนวนจริง และเมื่อใดก็ตามที่เราบรรยายนิยามเซตในรูปของ {x : x มีสมบัติ...} เราจะหมายถึง $\{x \in \mathbb{U}$: x มีสมบัติ...}.

เราเรียกเซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเท่ากับจำนวนนับบางตัวว่า **เซตจำกัด** (finite set) และเราใช้สัญลักษณ์ $|A|$ แทนจำนวนสมาชิกใน A. สังเกตว่าเซตว่างก็เป็นเซตจำกัดเพราะ $|\varnothing| = 0 \in \mathbb{N}$. เราเรียกเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด (นั่นคือมีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด) ว่า **เซตอนันต์** (infinite set). เซตจำนวนเต็มและเซตจำนวนจริงเป็นตัวอย่างของเซตอนันต์.

เมื่อกำหนดเซต S ใดๆ, เราเรียก*เซตของสับเซตทั้งหมดของ S* ว่า **เพาเวอร์เซต** (power set) ของ S เขียนแทนด้วย $\mathcal{P}(S)$. ตัวอย่างเช่นถ้าให้ S = {1,2}, จะได้

$$\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

เราสามารถพิสูจน์ได้หลายวิธีว่า ถ้า S เป็นเซตจำกัด, จำนวนสมาชิกของ P(S) จะเท่ากับ $2^{|S|}$ เราจะแสดงการพิสูจน์ความจริงนี้ในบทต่อๆไป.

การดำเนินการเกี่ยวกับเซต (set operations)

เราสามารถสร้างเซตใหม่จากเซตสองเซตได้หลายวิธี. ถ้าให้ A และ B เป็นเซตใดๆ, **ยูเนียน** (union) ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cup B$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A หรืออยู่ใน B. นั่นคือ

$$\boxed{A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}}$$

ตัวอย่างเช่น

$$\{2,4,8\} \cup \{4,6,8\} = \{2,4,6,8\}$$

$$\{2,4,8\} \cup \varnothing = \{2,4,8\}$$

อินเทอร์เซกชัน (intersection) ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในทั้ง A และ B. นั่นคือ

$$\boxed{A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}}$$

ตัวอย่างเช่น

$$\{2,4,8\} \cap \{4,6,8\} = \{4,8\}$$

$$\{2,4,8\} \cap \{1,3\} = \varnothing$$

$$\{2,4,8\} \cap \varnothing = \varnothing$$

เมื่อ $A \cap B = \varnothing$ แสดงว่าเซตทั้งสองไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย, เช่นนี้เราจะกล่าวว่าเซต A และ B **ไม่มีส่วนตัดกัน** (disjoint). จากตัวอย่างข้างบน จะเห็นว่า {2,4,8} และ {1,3} ไม่มีส่วนตัดกัน. ในทางตรงข้าม ถ้า $A \cap B \neq \varnothing$, เราจะกล่าวว่าเซต A และ B **มีส่วนตัดกัน**.

ผลต่าง (difference) ของ A และ B เขียนแทนด้วย A-B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B. นั่นคือ

$$A-B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

ตัวอย่างเช่น

$\{2,4,8\}-\{4,6\} = \{2,8\}$

$\{4,6\}-\{2,4,8\} = \{6\}$

$\{2,4,8\}-\{a,b,c\} = \{2,4,8\}$

$\{2,4,8\}-\varnothing = \{2,4,8\}$

$\varnothing-\{2,4,8\} = \varnothing$

เราเรียกผลต่าง A-B ได้อีกอย่างหนึ่งว่า **คอมพลิเมนต์ของ B เทียบกับ A** (complement of B with respect to A).

คอมพลิเมนต์ของเซต A เขียนแทนด้วย A' คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกในเซตเอกภพที่ไม่อยู่ใน A. นั่นคือ

$$A' = \mathbb{U}-A = \{x \in \mathbb{U} : x \notin A\}$$

ตัวอย่างเช่นเมื่อ $\mathbb{U}$ คือเซตจำนวนจริง และ $A = \{x : x < 1\}$, A' คือเซต $\{x : x \geq 1\}$.

ผลต่างสมมาตร (symmetric difference) ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \oplus B$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A หรือไม่ก็อยู่ใน B (แต่ไม่ใช่ทั้งสอง). นั่นคือ

$$A \oplus B = \{x : x \in A \oplus x \in B\}$$

ตัวอย่างเช่น

$\{2,4,8\} \oplus \{4,6\} = \{2,6,8\}$

$\{2,4,8\} \oplus \{a,b,c\} = \{2,4,8,a,b,c\}$

$\{2,4,8\} \oplus \varnothing = \{2,4,8\}$

$\{2,4,8\} \oplus \{2,4,8\} = \varnothing$

มีความจริงที่น่าสนใจคือ $A \oplus B = (A \cup B)-(A \cap B)$ สำหรับทุกเซต A และ B. ผู้อ่านสามารถพิสูจน์ความจริงนี้โดยใช้นิยามของโอเปอเรเตอร์ $\oplus$, $\cup$, และ $\cap$ ได้หรือไม่?

เอกลักษณ์เซต (Set Identity)

ในเรื่องของจำนวนจริงเรามีนิพจน์พีชคณิตอย่าง $x^3-5xy+3$. ในเรื่องของตรรกศาสตร์เรามีประพจน์ประกอบอย่าง $p \wedge (\sim q \vee r)$. ในเรื่องของเซตเราก็มีสิ่งที่เรียกว่า **นิพจน์เซต** (set expression) ด้วยเช่นกัน. นิพจน์เซตก็คือเซตที่นิยามขึ้นจากเซตหลายเซตที่เชื่อมกันด้วยโอเปอเรเตอร์ $\cup$, $\cap$, -, $\oplus$, และ $'$ ดังที่ให้ความหมายไว้ในหัวข้อย่อยที่แล้ว. ตัวอย่างของนิพจน์เซตได้แก่

$A \cap B$

$A-(B \cup C)'$

$(B \oplus A')-(B \cup C)'$

เป็นต้น.

เช่นเดียวกัน เมื่อเรามีเอกลักษณ์ทางพีชคณิตอย่าง $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ ที่เป็นจริงทุกค่า x และ y และสมมูลเชิงตรรกอย่าง $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ ที่เป็นจริงทุกประพจน์ p และ q, ในเรื่องของเซตเราก็มีสิ่งที่เรียกว่า **เอกลักษณ์เซต** (set identity) ดังเช่น $(A \cup B)' = (A' \cap B')$ ที่เป็นจริงสำหรับเซต A และ B ใดๆเช่นกัน. เอกลักษณ์เซตคือการเท่ากันของนิพจน์เซตสองนิพจน์ ไม่ว่าเซตย่อยในนิพจน์ทั้งสองจะเป็นเซตใดก็ตาม. ตาราง 1 แสดงเอกลักษณ์เซตที่สำคัญ.

ตาราง 1 : เอกลักษณ์เซตที่สำคัญ

เอกลักษณ์เซต	ชื่อ
1) $(A')' = A$	กฎการนิเสธสองชั้น (double negation law)
2) $A \cup A = A$ $A \cap A = A$	กฎไอเดมโพเทนต์ (idempotent law)
3) $A \cup \varnothing = A$ $A \cap \mathbb{U} = A$	กฎเอกลักษณ์ (identity law)
4) $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	กฎการครอบงำ (domination law)
5) $A \cup A' = \mathbb{U}$ $A \cap A' = \varnothing$	กฎการผกผัน (inverse law)
6) $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	กฎการสลับที่ (commutative law)
7) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	กฎการเปลี่ยนหมู่ (associative law)
8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	กฎการแจกแจง (distributive law)
9) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$	กฎของเดอมอร์แกน (De Morgan's law)

ถ้าเราเปรียบเทียบตารางเอกลักษณ์เซตข้างบนนี้กับตารางกฎตรรกศาสตร์ (ตาราง 1 บทที่ 1) จะพบความคล้ายคลึงกันที่น่าสนใจมาก. ให้สังเกตว่าสำหรับกฎแต่ละข้อในตารางข้างบน ถ้าเราเปลี่ยนเซต A, B และ C เป็นประพจน์ p, q, และ r, เปลี่ยนโอเปอเรเตอร์ $\cup$, $\cap$, และ $'$ เป็นโอเปอเรเตอร์เชิงตรรก $\vee$, $\wedge$, และ $\sim$, เปลี่ยน $\mathbb{U}$ เป็น $\mathcal{T}$, และเปลี่ยน $\varnothing$ เป็น $\mathcal{F}$ แล้ว เราจะได้กฎตรรกศาสตร์ข้อเดียวกัน (และชื่อ

เดียวกัน) ในตาราง 1 บทที่ 1. ยิ่งไปกว่านั้น มโนทัศน์เรื่อง*ภาวะคู่ (duality)* ของสมมูลเชิงตรรกก็สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้กับเอกลักษณ์เซตเช่นกัน ดังจะเห็นได้ว่าเอกลักษณ์เซตในตารางข้างบนจะมีลักษณะเป็นคู่ๆ. บทนิยาม 3 และทฤษฎีบท 1 และ 2 ข้างล่างสรุปใจความของเรื่องภาวะคู่สำหรับเอกลักษณ์เซต ซึ่งคล้ายคลึงกับบทนิยาม 3 และทฤษฎีบท 1 และ 2 ในบทที่ 1 เป็นอย่างมาก.

บทนิยาม 3: ถ้า P เป็นนิพจน์เซตใดๆ ที่ไม่มีโอเปอเรเตอร์อื่นใดนอกจาก $'$, $\cup$, และ $\cap$, เราจะเรียกนิพจน์เซตที่สร้างจาก P โดยการแทนที่ $\cup$ ทุกแห่งด้วย $\cap$, แทนที่ $\cap$ ทุกแห่งด้วย $\cup$, แทนที่ $\mathbb{U}$ ทุกแห่งด้วย $\varnothing$, และแทนที่ $\varnothing$ ทุกแห่งด้วย $\mathbb{U}$ ว่า **ดูออล** (dual) ของ P เขียนแทนด้วย P^d.

ตัวอย่าง 1: กำหนดให้ A, B, และ C เป็นเซตใดๆ จงหาดูออลของนิพจน์เซต $(A\cup B')\cap C$, $(A\cap B)'\cup C\cup\mathbb{U}$, และ $(A\cup\varnothing)\cap(B'\cup\mathbb{U})'$.

<u>*วิธีทำ*</u> จากบทนิยาม 3 เราหาดูออลของประพจน์ทั้งสามได้โดยการแทน $\cup$, $\cap$, $\mathbb{U}$, และ $\varnothing$ ด้วย $\cap$, $\cup$, $\varnothing$, และ $\mathbb{U}$ ตามลำดับ. ดังนั้นดูออลของนิพจน์เซตทั้งสามคือ $(A\cap B')\cup C$, $(A\cup B)'\cap C\cap\varnothing$, และ $(A\cap\mathbb{U})\cup(B'\cap\varnothing)'$ ตามลำดับ.

❏

ทฤษฎีบท 1 : ถ้า P เป็นนิพจน์เซตใดๆ ที่ไม่มีโอเปอเรเตอร์อื่นใดนอกจาก $'$, $\cup$, และ $\cap$, จะได้ว่า $(P^d)^d = P$. *(นั่นคือ P และ P^d เป็นดูออลของกันและกัน)*

ทฤษฎีบท 2 : หลักของภาวะคู่ (Principle of Duality) สำหรับเซต

ถ้า P และ Q เป็นนิพจน์เซตใดๆ ที่ไม่มีโอเปอเรเตอร์อื่นใดนอกจาก $'$, $\cup$, และ $\cap$ โดยที่ P = Q, จะได้ว่า $P^d = Q^d$ ด้วยเช่นกัน. เรากล่าวว่า P = Q กับ $P^d = Q^d$ เป็น**คู่เอกลักษณ์**ของกันและกัน

เช่นเดียวกับในตรรกศาสตร์ ประโยชน์ของหลักภาวะคู่คือ เมื่อเราพิสูจน์เอกลักษณ์เซตหนึ่งๆ ได้แล้ว เราจะได้คู่เอกลักษณ์ของมันเป็นเอกลักษณ์เซตโดยไม่ต้องเสียเวลาพิสูจน์อีก. ตัวอย่างเช่นเมื่อเราพิสูจน์แล้วว่า $A\cup\mathbb{U} = \mathbb{U}$ เป็นเอกลักษณ์เซต เราจะสรุปได้ว่าคู่เอกลักษณ์ของมันคือ $A\cap\varnothing = \varnothing$ ก็เป็นเอกลักษณ์เซตด้วยเช่นกัน.

การเทียบเคียงกันได้ (analogy) ระหว่างกฎตรรกศาสตร์กับเอกลักษณ์เซตและระหว่างหลักของภาวะคู่ในตรรกศาสตร์กับทฤษฎีเซตมิใช่เรื่องบังเอิญ. เราจะเห็นเหตุของการเทียบเคียงกันได้นี้ในหัวข้อย่อยต่อไป เมื่อเรารู้จักสิ่งที่เรียกว่า*ตารางสมาชิกภาพของนิพจน์เซต.*

และเช่นเดียวกับในตรรกศาสตร์ กฎข้อที่ 7 ในตาราง 1 ที่เรียกว่า *กฎการเปลี่ยนหมู่สำหรับโอเปอเรเตอร์ $\cup$ และ $\cap$* ทำให้เราสามารถเขียนโดยละวงเล็บว่า $A\cup B\cup C$ และ $A\cap B\cap C$ เพื่อเน้นว่าลำดับการทำงานของโอเปอเรเตอร์ทั้งสองในนิพจน์เซตไม่มีความสำคัญ. ความจริงนี้ใช้ได้เช่นกันในกรณีที่มีจำนวนโอเปอเรเตอร์มากกว่าสอง นั่นคือเราอาจเขียนว่า $A\cup B\cup C\cup D$ และ $A\cap B\cap C\cap D\cap E$ โดยไม่ต้องใส่วงเล็บ.

นอกจากนี้ โดยการพิสูจน์โดยอุปนัย เราสามารถขยายกฎของเดอมอร์แกนได้เช่นกัน กล่าวคือถ้าให้ $A_1, A_2, \ldots,$ และ A_n เป็นเซตใดๆ โดย $n \geq 2$ เราได้

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_3'$$

และ

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_3'$$

การพิสูจน์เอกลักษณ์เซต (Proving set identities)

เรามีวิธีพิสูจน์เอกลักษณ์เซตได้หลายวิธี. วิธีแรกคือการแสดงให้เห็นว่านิพจน์เซตทางซ้ายและทางขวาของเอกลักษณ์เซตต่างเป็นสับเซตของกันและกัน ดังแสดงในตัวอย่าง 2. การแสดงว่าเซต P ใดๆเป็นสับเซตของเซต Q ใดๆ ทำได้โดยอาศัยนิยามของสับเซต. นั่นคือเราต้องแสดงให้เห็นว่า สำหรับ x ใดๆก็ตาม ใน $\mathbb{U}$, ถ้า $x \in P$ แล้ว $x \in Q$ เช่นกัน. ตัวอย่าง 2 แสดงวิธีการพิสูจน์เอกลักษณ์เซตดังกล่าว.

ตัวอย่าง 2: จงพิสูจน์เอกลักษณ์เซต $A-B = A \cap B'$ โดยแสดงว่านิพจน์เซตทั้งสองเป็นสับเซตของกันและกัน.

<u>*วิธีทำ*</u> ขั้นแรก เราจะแสดงให้เห็นว่า $A-B \subseteq A \cap B'$. ให้ x เป็นสมาชิกใดๆใน $A-B$. ดังนั้น $x \in A$ และ $x \notin B$. นั่นคือ $x \in A$ และ $x \in B'$. ดังนั้นเราได้ $x \in A \cap B'$ เราจึงได้แสดงแล้วว่า $A-B \subseteq A \cap B'$.

ขั้นที่สอง เราจะแสดงให้เห็นว่า $A \cap B' \subseteq A-B$. ให้ x เป็นสมาชิกใดๆใน $A \cap B'$. ดังนั้น $x \in A$ และ $x \in B'$. นั่นคือ $x \in A$ และ $x \notin B$ ดังนั้น $x \in A-B$. เราจึงได้แสดงแล้วว่า $A \cap B' \subseteq A-B$.

❏

วิธีที่สองในการพิสูจน์เอกลักษณ์เซตคือการเขียนนิพจน์เซตทางซ้ายในรูปของการบ่งบอกสมบัติของสมาชิก และใช้สมมูลเชิงตรรกมาเปลี่ยนข้อความจนกระทั่งได้นิยามของนิพจน์เซตทางขวา. ตัวอย่าง 3 แสดงการใช้วิธีการนี้.

ตัวอย่าง 3: จงพิสูจน์เอกลักษณ์เซต $(A-B)' = A' \cup B$ โดยนิยามของเซตและสมมูลเชิงตรรก.

<u>*วิธีทำ*</u> เราเริ่มจากการเขียนนิยามของ $(A-B)'$ แล้วใช้สมมูลเชิงตรรกเปลี่ยนข้อความจนได้นิยามของ $A' \cup B$ ในที่สุด ดังนี้.

$$\begin{aligned}(A-B)' &= \{x : x \notin A-B\}\\ &= \{x : \sim(x \in A-B)\}\\ &= \{x : \sim(x \in A \wedge x \notin B)\}\\ &= \{x : x \notin A \vee x \in B\}\\ &= \{x : x \notin A\} \cup \{x : x \in B\}\\ &= A' \cup B\end{aligned}$$

❏

วิธีที่สามในการพิสูจน์เอกลักษณ์เซตคือการใช้**ตารางสมาชิกภาพ** (membership table) ของนิพจน์เซต ซึ่งเทียบเคียงได้กับตารางค่าความจริงของประพจน์ประกอบในตรรกศาสตร์. ตาราง 2, 3, และ 4 แสดงตารางสมาชิกภาพของนิพจน์เซต $A \cup B$, $A \cap B$, และ A'.

ตาราง 2

ตารางสมาชิกภาพของ $A\cup B$

A	B	$A\cup B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ตาราง 3

ตารางสมาชิกภาพของ $A\cap B$

A	B	$A\cap B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตาราง 4

ตารางสมาชิกภาพของ A'

A	A'
T	F
F	T

ตารางสมาชิกภาพของนิพจน์เซตมีความหมายอย่างไร? สำหรับ x ใดๆในเอกภพ $\mathbb{U}$, ถ้านิพจน์เซตประกอบด้วยเซตเพียงสองเซตคือ A และ B, สมาชิกภาพของ x ในเซตทั้งสองจะมี 4 กรณีที่เป็นไปได้คือ 1. $x\in A$ และ $x\in B$, 2. $x\in A$ แต่ $x\notin B$, 3. $x\notin A$ แต่ $x\in B$, และ 4. $x\notin A$ และ $x\notin B$. แต่ละแถวในตาราง 2 และ 3 ข้างบนแทนแต่ละกรณีทั้งสี่ดังกล่าว โดย T หมายถึงเป็นสมาชิกของเซตนั้นและ F หมายถึงไม่เป็นสมาชิก. ในคอลัมน์ที่สามของตาราง 2 และ 3 จะแทนสมาชิกภาพของ $A\cup B$ และ $A\cap B$ สำหรับแต่ละกรณีทั้งสี่ตามลำดับ.

สังเกตว่าจำนวนแถวในตารางสมาชิกภาพเท่ากับ 2^n เมื่อ n คือจำนวนเซตภายในนิพจน์เซต เพื่อเป็นการสะท้อนว่ามีทั้งหมด n กรณีที่เป็นไปได้สำหรับสมาชิกภาพใน n เซตของแต่ละ x ใน $\mathbb{U}$.

เราสามารถใช้ตารางสมาชิกภาพของนิพจน์เซตในการพิสูจน์เอกลักษณ์เซตได้เพราะความจริงต่อไปนี้

นิพจน์เซตสองนิพจน์จะเท่ากัน เมื่อและต่อเมื่อ นิพจน์ทั้งสองมีตารางสมาชิกภาพเหมือนกัน

ดังนั้นการพิสูจน์เอกลักษณ์เซตทำได้โดยการแสดงให้เห็นว่านิพจน์ทางซ้ายและทางขวามีตารางสมาชิกภาพเหมือนกัน ดังในตัวอย่างต่อไปนี้.

ตัวอย่าง 4: จงพิสูจน์กฎของเดอมอร์แกน $(A\cup B)' = A'\cap B'$ โดยใช้ตารางสมาชิกภาพ.

<u>*วิธีทำ*</u> เราสร้างตารางสมาชิกภาพของนิพจน์ซ้ายและขวาโดยเขียนอยู่ในตารางเดียวกันดังนี้

A	B	$A\cup B$	$(A\cup B)'$	A'	B'	$A'\cap B'$
T	T	T	**F**	F	F	**F**
T	F	T	**F**	F	T	**F**
F	T	T	**F**	T	F	**F**
F	F	F	**T**	T	T	**T**

จะเห็นว่าคอลัมน์ 4 และ 7 เหมือนกันทุกประการ ดังนั้นนิพจน์ทั้งสองเท่ากันเสมอสำหรับเซต A และ B ใดๆ.

❑

สังเกตว่าตารางสมาชิกภาพของนิพจน์เซตเทียบเคียงได้กับตารางค่าความจริงของประพจน์ประกอบในตรรกศาสตร์. ตารางสมาชิกภาพของ $A\cup B$, $A\cap B$, และ A' แทบจะเรียกได้ว่าเป็นตารางเดียวกับตารางค่าความจริงของ $p\vee q$, $p\wedge q$, และ $\sim p$ และการพิสูจน์เอกลักษณ์เซตโดยใช้ตารางสมาชิกภาพ

เทียบเคียงได้กับการพิสูจน์สมมูลเชิงตรรกโดยใช้ตารางค่าความจริง. ด้วยเหตุนี้ ย่อมไม่เป็นที่น่าแปลกใจอีกต่อไปว่า เพราะเหตุใดเอกลักษณ์เซตในตาราง 1 ข้างบน จึงเทียบเคียงได้กับกฎทางตรรกศาสตร์ ในตาราง 1 บทที่ 1 และทำไมมโนทัศน์เรื่องดูออล, ภาวะคู่, และหลักของภาวะคู่จึงใช้ได้กับทั้งในตรรกศาสตร์และในทฤษฎีเซต.

อีกวิธีที่จะกล่าวเป็นวิธีสุดท้ายในที่นี้ในการพิสูจน์เอกลักษณ์เซตคือการใช้เอกลักษณ์เซตที่เราทราบแล้ว (เช่นในตาราง 1) มาแปลงนิพจน์เซตทางซ้ายให้เป็นนิพจน์เซตทางขวาของเอกลักษณ์ที่เราต้องการพิสูจน์. เราอาจเรียกวิธีนี้ว่าเป็นการใช้*พีชคณิตของเซต* ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้.

ตัวอย่าง 5: จงพิสูจน์เอกลักษณ์เซต $(A-B)' = A\cup B'$ โดยใช้พีชคณิตของเซต.

<u>*วิธีทำ*</u> การพิสูจน์นี้เราใช้เอกลักษณ์เซต $A-B = A\cap B'$ ซึ่งได้มาโดยตรงจากนิยามของ $A-B$. เราเริ่มต้นจากนิพจน์เซตทางซ้ายและใช้พีชคณิตของเซตเปลี่ยนรูปจนได้นิพจน์เซตทางขวา ดังนี้

$$\begin{aligned}(A-B)' &= (A\cap B')' && \text{--จากเอกลักษณ์ } A-B = A\cap B' \\ &= A'\cup(B')' && \text{--จากกฎของเดอมอร์แกน} \\ &= A'\cup B && \text{--จากกฎการนิเสธสองชั้น}\end{aligned}$$

❑

ยูเนียนและอินเทอร์เซกชันของเซตหลายเซต

หัวข้อย่อยนี้จะแนะนำสัญลักษณ์ที่ใช้แทนยูเนียนและอินเทอร์เซกชันของเซตหลายเซต. ถ้าให้ S เป็นเซตของเซตตั้งแต่หนึ่งเซตขึ้นไป, ยูเนียนของเซตทุกเซตใน S จะเขียนแทนด้วย $\cup S$ และอินเทอร์เซกชันของเซตทุกเซตใน S จะเขียนแทนด้วย $\cap S$.

ตัวอย่าง 6: กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,5\}$, และ $C = \{2,3,6,7\}$ และให้ $S = \{A,B,C\}$ ดังนั้น

$$\cup S = A\cup B\cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$\cap S = A\cap B\cap C = \{3\}$$

$$\cup\{A\} = A = \cap\{A\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\cup\mathcal{P}(B) = \{\varnothing,\{3\},\{5\},\{3,5\}\} = \varnothing\cup\{3\}\cup\{5\}\cup\{3,5\} = \{3,5\} = B$$

❑

เซต S อาจเป็นเซตอนันต์ก็ได้ เช่นให้ $S = \{\{n,-n\} : n\in \mathbb{N}\} = \{\{0\},\{1,-1\},\{2,-2\},\ldots\}$ ดังนั้น $\cup S = \mathbb{N}$ และ $\cap S = \varnothing$. ความจริงที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งคือ $\cup\mathcal{P}(A) = A$ สำหรับเซต A ใดๆ ทั้งนี้เพราะ A เป็นสมาชิกหนึ่งของ $\mathcal{P}(A)$ เสมอ.

เราจะให้นิยามอย่างเป็นทางการของ $\cup S$ และ $\cap S$ ดังนี้

บทนิยาม 4: กำหนดให้ S เป็นเซตของเซตตั้งแต่หนึ่งเซตขึ้นไป. ยูเนียนของทุกเซตใน S เขียนแทนด้วย $\cup S$ และอินเทอร์เซกชันของทุกเซตใน S เขียนแทนด้วย $\cap S$ มีนิยามดังนี้

$$\cup S = \{x : \exists A\in S\ [x\in A]\} = \{x : x \text{ เป็นสมาชิกของเซตบางเซตใน } S\}$$

และ

$$\cap S = \{x : \forall A\in S\ [x\in A]\} = \{x : x \text{ เป็นสมาชิกของทุกเซตใน } S\}$$

พาร์ทิชัน (Partition)

มโนทัศน์ที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งคือการแบ่งเซตไม่ว่างเซตใดเซตหนึ่งออกเป็นส่วนๆ โดยที่แต่ละส่วนไม่มีส่วนตัดกันเลย. เราเรียกการแบ่งเซตแบบหนึ่งๆ ว่าเป็น **พาร์ทิชัน** (partition) ของเซตๆนั้น.

บทนิยาม 5: ให้ A เป็นเซตไม่ว่างใดๆ และ Π เป็นสับเซตหนึ่งของ $\mathcal{P}(A)$ (นั่นคือ ทุกเซตใน Π เป็นสับเซตของ A) เราจะเรียก Π ว่าเป็น ***พาร์ทิชัน (partition)*** ของ A เมื่อและต่อเมื่อ Π มีสมบัติทั้งสามข้อต่อไปนี้:

(1) $\forall A\in\Pi\ [A \neq \varnothing]$ *(เซตทุกเซตใน Π ไม่เป็นเซตว่าง)*

(2) $\forall A\in\Pi\forall B\in\Pi\ ([A\neq B]\rightarrow[A\cap B=\varnothing])$ *(เซตสองเซตที่แตกต่างกันใน Π ไม่มีส่วนตัดกัน)*

(3) $\cup\Pi = A$ *(ยูเนียนของเซตทุกเซตใน Π เท่ากับเซต A)*

เราเรียกเซตแต่ละเซตใน Π ว่าเป็น ***บล็อก (block)*** หนึ่งในพาร์ทิชัน Π.

กล่าวโดยย่อคือ พาร์ทิชันของเซตไม่ว่าง A ใดๆ คือเซตของสับเซตไม่ว่างกลุ่มหนึ่งของ A ที่ไม่มีส่วนตัดกันเลยและยูเนียนของสับเซตกลุ่มนี้คือ A.

ตัวอย่าง 7: ถ้าให้ A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} เซตใดต่อไปนี้เป็นพาร์ทิชันของ A.

(1) P = {{1}, {3,5,7}, {2,4,6,8}, {9}}

(2) Q = {$\varnothing$, {1,3,5,7}, {2,4,8}}

(3) $\mathcal{P}(A)$

<u>*วิธีทำ*</u> เซต P เป็นพาร์ทิชันของ A เพราะทุกเซตใน P เป็นสับเซตไม่ว่างของ A โดยไม่มีเซตคู่ใดใน P มีส่วนตัดกันเลย และยูเนียนของทุกเซตใน P เท่ากับ A.

เซต Q ไม่เป็นพาร์ทิชันของ A เพราะสมาชิกตัวหนึ่งของ Q เป็นเซตว่าง และ $\cup Q$ = {1,2,3,4,5,7,8} $\neq$ A.

แม้ว่า $\cup\mathcal{P}(A) = A$ แต่ $\mathcal{P}(A)$ ไม่เป็นพาร์ทิชันของ A เพราะ $\varnothing\in\mathcal{P}(A)$ และมีเซตบางคู่ใน $\mathcal{P}(A)$ เช่น {1} และ {1,2} มีส่วนตัดกัน.

❑

พาร์ทิชันของเซตอนันต์ใดๆอาจมีจำนวนบล็อกเป็นอนันต์ก็ได้ ตัวอย่างเช่น เซต Π ต่อไปนี้เป็นพาร์ทิชันแบบหนึ่งของ $\mathbb{R}$ ที่มีจำนวนบล็อกเป็นอนันต์ (นั่นคือ Π เป็นเซตอนันต์):

$$\Pi = \{\{x\in\mathbb{R} : n \leq x < n+1\} : n \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{\ldots, \{x\in\mathbb{R} : -1 \leq x < 0\}, \{x\in\mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}, \{x\in\mathbb{R} : 1 \leq x < 2\}, \ldots\}$$

ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

เราให้ความหมายของเซตว่าเป็นกลุ่มของวัตถุที่แตกต่างกันโดยที่อันดับของวัตถุภายในเซตไม่มีนัยสำคัญ. หัวข้อย่อยนี้จะแนะนำมโนทัศน์ของกลุ่มวัตถุที่อาจไม่แตกต่างกันหมดและอันดับของวัตถุ

ภายในกลุ่มมีนัยสำคัญ. กลุ่มวัตถุดังกล่าวเรียกว่า **n-ทูเปิลมีอันดับ** (ordered n-tuple) หรือเรียกสั้นๆ ว่า **n-ทูเปิล** (n-tuple).

เราให้นิยามของ n-ทูเปิล $(x_1,x_2,...,x_n)$, โดย $n \geq 1$, ว่าเป็นกลุ่มของวัตถุที่มีอันดับที่แน่นอน โดยมี x_1 เป็นองค์ประกอบอันดับที่หนึ่ง, x_2 เป็นองค์ประกอบอันดับที่สอง, ..., และ x_n เป็นองค์ประกอบอันดับที่ n, และอาจมีองค์ประกอบบางคู่ที่ไม่แตกต่างกัน. ตัวอย่างเช่น (a,b,a,c,b) เป็น 5-ทูเปิล และ (3,1,1) เป็น 3-ทูเปิล. เรานิยมเรียก 2-ทูเปิลว่า **คู่อันดับ** (ordered pair) และตำราหลายเล่มจะใช้คำว่า **ทริเปิล** (triple), **ควอดรูเปิล** (quadruple), **ควินทูเปิล** (quintuple), และ**เซกซ์ทูเปิล** (sextuple) แทน 3-ทูเปิล, 4-ทูเปิล, 5-ทูเปิล, และ 6-ทูเปิล ตามลำดับ.

เนื่องจากอันดับขององค์ประกอบใน n-ทูเปิลมีนัยสำคัญ ดังนั้นเราจะกล่าวว่า

$$(x_1,x_2,...,x_m) = (y_1,y_2,...,y_n)$$

เมื่อและต่อเมื่อ m = n และ $x_i = y_i$ ทุก i = 1,2,...,m. ดังนั้น $(1,3) \neq (3,1)$ และ $(a,b,c,c) \neq (a,b,c)$.

เราจะใช้มโนทัศน์ของ n-ทูเปิลมานิยามการดำเนินการอย่างหนึ่งระหว่างเซตหลายเซตที่เรียกว่า ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต ดังนี้.

บทนิยาม 6: **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (Cartesian product) ของเซต A_1, A_2, ...,และ A_n โดย n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ คือเซต $\{(a_1,a_2,...,a_n) : a_i \in A_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, ..., n\}$ และเขียนแทนด้วย $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

ตัวอย่างเช่น

$\{1,3,5\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(3,a),(3,b),(5,a),(5,b)\}$

$\{1,3\} \times \{a,b\} \times \{a,b\} = \{(1,a,a),(1,a,b),(1,b,a),(1,b,b),(3,a,a),(3,a,b),(3,b,a),(3,b,b)\}$

เป็นต้น.

ถ้าทุกเซต A_i ในบทนิยามข้างบนเป็นเซตเดียวกันหมดคือเซต A, เราอาจเขียนผลคูณ $A \times A \times ... \times A$ จำนวน n เซตนี้เป็น A^n. ตัวอย่างเช่น $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ คือเซตของคู่อันดับของจำนวนเต็มทั้งหมด และ $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ คือเซตของทริเปิลของจำนวนจริงทั้งหมด.

เนื่องจากผลคูณคาร์ทีเซียนก็เป็นเซตๆหนึ่ง ดังนั้นเราสามารถหาผลคูณคาร์ทีเซียนของผลคูณคาร์ทีเซียนกับเซตอื่นๆ ได้. ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ A={1,3}, B = {a,b}, และ C={0} ดังนั้นเราได้

$A \times B \times C = \{(1,a,0),(1,b,0),(3,a,0),(3,b,0)\}$

$A \times (B \times C) = \{1,3\} \times \{(a,0),(b,0)\} = \{(1,(a,0)),(1,(b,0)),(3,(a,0)),(3,(b,0))\}$

$(A \times B) \times C = \{(1,a),(1,b),(3,a),(3,b)\} \times \{0\} = \{((1,a),0),((1,b),0),((3,a),0),((3,b),0)\}$

แม้เซตทั้งสามข้างบนจะมีสมาชิกที่มีลักษณะคล้ายคลึงกัน แต่ก็เป็นเซตที่แตกต่างกัน. เซตแรกเป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตเดี่ยวสามเซต ในขณะที่เซตที่สองและสามเป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตสองเซต โดยเซตหนึ่งเป็นเซตเดี่ยวแต่อีกเซตหนึ่งเป็นผลคูณคาร์ทีเซียน.

2.2 ความสัมพันธ์ (Relation)

ความสัมพันธ์ทวิภาค (binary relation)

มโนทัศน์พื้นฐานที่สำคัญยิ่งอีกอย่างหนึ่งในคณิตศาสตร์คือ *ความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของเซตหนึ่งกับสมาชิกของอีกเซตหนึ่ง.* ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ, เราสามารถนิยามความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกใน A กับสมาชิกใน B (เรียกสั้นๆว่า *ความสัมพันธ์จากเซต A ไปเซต B*) ได้หลายแบบ โดยแทนความสัมพันธ์แต่ละแบบในรูปของเซต R ของคู่อันดับใน $A \times B$ โดยที่ $(a,b) \in R$ เมื่อและต่อเมื่อ a *สัมพันธ์แบบ R* กับ b.

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ A = {2,3} และ B = {1,3,6}, เราแทนความสัมพันธ์ "น้อยกว่า" จาก A ไป B ด้วยเซต $R = \{(x,y) \in A \times B : x < y\} = \{(2,3),(2,6),(3,6)\}$ และแทนความสัมพันธ์ "หารลงตัว" จาก A ไป B ด้วยเซต $S = \{(x,y) \in A \times B : x$ หาร y ลงตัว$\} = \{(2,6),(3,3),(3,6)\}$ เป็นต้น.

กล่าวโดยทั่วไป สับเซตใดๆก็ตามของ $A \times B$ ล้วนถือว่าเป็นความสัมพันธ์แบบหนึ่งระหว่าง A และ B ทั้งสิ้น. เราจะเรียกความสัมพันธ์ระหว่างเซตสองเซตว่า **ความสัมพันธ์ทวิภาค** (binary relation) ซึ่งมีนิยามอย่างเป็นทางการดังนี้.

บทนิยาม 1: ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ. เราเรียกสับเซต R ใดๆของ $A \times B$ ว่า **ความสัมพันธ์ทวิภาคจาก A ไป B** (binary relation from A to B) หรือเรียกสั้นๆว่า **ความสัมพันธ์จาก A ไป B**. เมื่อ $(a,b) \in R$, เราจะกล่าวว่า **a สัมพันธ์แบบ R กับ b** หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ว่า a R b. เมื่อ $(a,b) \notin R$ เราจะกล่าวว่า **a ไม่สัมพันธ์แบบ R กับ b.**

เราเรียกสับเซตของ A ที่เป็นเซตขององค์ประกอบตัวแรกของคู่อันดับทั้งหลายใน R ว่า **โดเมน** (domain) ของความสัมพันธ์ R เขียนแทนด้วย dom(R). นั่นคือ

$$\text{dom}(R) = \{x \in A : \exists y \in B\, [(x,y) \in R]\}$$

และเรียกสับเซตของ B ที่เป็นเซตขององค์ประกอบที่สองของคู่อันดับทั้งหลายใน R ว่า **เรนจ์** (range) ของความสัมพันธ์ R เขียนแทนด้วย range(R). นั่นคือ

$$\text{range}(R) = \{y \in B : \exists x \in A\, [(x,y) \in R]\}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ A = {0,2,4}, B = {1,3,5}, และ R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยที่ x R y เมื่อและต่อเมื่อ $x+y > 5$. จะเห็นว่า $(0,1) \notin R$ (หรือกล่าวว่า *0 ไม่สัมพันธ์แบบ R กับ 1*) เพราะ $0+1 \not> 5$; ในขณะที่ $(2,5) \in R$ (หรือเขียนว่า 2 R 5 หรือกล่าวว่า *2 สัมพันธ์แบบ R กับ 1*) เพราะ $2+5 > 5$. เราแจกแจงสมาชิกทั้งหมดใน R ได้เป็น R = {(2,5),(4,3),(4,5)} ดังนั้น dom(R) = {2,4} และ range(R) = {3,5}.

บทนิยาม 2: ให้ A เป็นเซตใดๆ. เราเรียกความสัมพันธ์ R ใดๆจาก A ไป A ว่าเป็น**ความสัมพันธ์ทวิภาคบนเซต A** (binary relation on A).

นั่นคือทุกสับเซตของ $A\times A$ เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคบน A. ตัวอย่างเช่น เซต $\{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : y = |x|\} = \{(0,0),(1,1),(2,2),...\}\cup\{(-1,1),(-2,2),(-3,3),...\}$ เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$ ที่มีโดเมนคือ $\mathbb{Z}$ และเรนจ์คือ $\mathbb{Z}^+$.

การดำเนินการเกี่ยวกับความสัมพันธ์ทวิภาค

(Operations on Binary Relations)

หัวข้อย่อยนี้จะกล่าวถึงการสร้างความสัมพันธ์ใหม่จากความสัมพันธ์ที่มีอยู่. เนื่องจากความสัมพันธ์เป็นเซต ดังนั้นการดำเนินการเกี่ยวกับเซตไม่ว่าจะเป็นยูเนียน, อินเทอร์เซกชัน, ผลต่าง, ผลต่างสมมาตร, หรือคอมพลิเมนต์ ล้วนแล้วแต่ใช้ได้กับความสัมพันธ์ทั้งสิ้น. ถ้า R และ S เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B (นั่นคือ $R \subseteq A\times B$), เซต $R\cup S$, $R\cap S$, $R-S$, และ $R\oplus S$ ล้วนแล้วแต่เป็นสับเซตของ $A\times B$ ดังนั้นทุกเซตจึงเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ทั้งสิ้น. และถ้าเราละไว้ในฐานที่เข้าใจว่าเซตเอกภพคือ $A\times B$, คอมพลิเมนต์ของ R, เขียนแทนด้วย R', ก็คือเซต $\{(x,y)\in A\times B : (x,y)\notin R\}$ ซึ่งก็เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เช่นกัน.

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ A คือเซตของนิสิตปัจจุบันทั้งหมดของมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ และ B คือเซตของนิสิตปัจจุบันทั้งหมดของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และให้ R และ S เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยที่ R = {(x,y) : x มีอายุมากกว่า y} และ S = {(x,y) : x เป็นญาติกับ y}, ดังนั้นเราได้

$R\cup S$ = $\{(x,y)\in A\times B$: x มีอายุมากกว่า y หรือเป็นญาติกับ y}

$R\cap S$ = $\{(x,y)\in A\times B$: x มีอายุมากกว่า y และเป็นญาติกับ y}

$R-S$ = $\{(x,y)\in A\times B$: x มีอายุมากกว่า y แต่ไม่ได้เป็นญาติกับ y}

$R\oplus S$ = $\{(x,y)\in A\times B$: x มีอายุมากกว่า y หรือไม่ก็เป็นญาติกับ y (แต่ไม่ใช่ทั้งสองอย่าง)}

R' = $\{(x,y)\in A\times B$: x มีอายุน้อยกว่าหรือเท่ากับ y}

เป็นต้น.

บทนิยาม 3: ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ และ R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B. **ความสัมพันธ์ผกผัน** (inverse relation) **ของ R**, เขียนแทนด้วย R^{-1}, คือความสัมพันธ์จาก B ไป A โดยที่

$$R^{-1} = \{(x,y) : (y,x)\in R\}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ A เป็นเซตของเมืองทั้งหมดในโลก และ B เป็นเซตของประเทศทั้งหมดในโลก และให้ $R = \{(x,y)\in A\times B$: เมือง x เป็นเมืองหลวงของประเทศ y}, เราจะได้ $R^{-1} = \{(x,y)\in B\times A : (y,x)\in R\} = \{(x,y)\in B\times A$: ประเทศ x มีเมือง y เป็นเมืองหลวง}.

ถ้าเรามีความสัมพันธ์ R จาก A ไป B และความสัมพันธ์ S จาก B ไป C, เราสามารถสร้างความสัมพันธ์ใหม่จาก A ไป C โดยใช้ความสัมพันธ์ R และ S ดังนิยามต่อไปนี้.

บทนิยาม 4: ให้ A, B, และ C เป็นเซตใดๆ, และให้ R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ S เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C, **ความสัมพันธ์ประกอบของ R และ S** (composite relation of R and S), เขียนแทนด้วย $S \circ R$ หรือเขียนสั้นๆว่า RS, คือความสัมพันธ์จาก A ไป C โดยที่

$$S \circ R \text{ (หรือ RS)} = \{(x,y) \in A \times C : \exists z \in B\ ([x\ R\ z] \wedge [z\ S\ y])\}$$

ข้อสังเกตเรื่องสัญลักษณ์: จากนิยามของความสัมพันธ์ประกอบของ R และ S ข้างบน ความสัมพันธ์แบบ $S \circ R$ จาก x ไป y สร้างจากความสัมพันธ์ R และ S ตามลำดับ. ดังนั้นการใช้สัญลักษณ์ $S \circ R$ จึงดูขัดกับลำดับ *R ตามด้วย S* ดังกล่าว. ด้วยเหตุนี้ ตำราบางเล่มจึงใช้สัญลักษณ์ $R \circ S$ ในความหมายเดียวกับ $S \circ R$ ที่เราใช้. แต่การใช้สัญลักษณ์ $R \circ S$ แทนความสัมพันธ์ประกอบของ R และ S ไม่สอดคล้องกับการใช้สัญลักษณ์ $g \circ f$ แทนฟังก์ชันประกอบของ f และ g ซึ่งต้องการให้ $g \circ f\ (x) = g(f(x))$. ดังนั้น เพื่อให้สอดคล้องกับนิยามของฟังก์ชันประกอบ หนังสือเล่มนี้จึงเลือกใช้สัญลักษณ์ $S \circ R$ (แทนที่จะเป็น $R \circ S$) แทนความสัมพันธ์ประกอบของ R และ S ดังในบทนิยาม 4. แต่เพื่อให้การสื่อความหมายของความสัมพันธ์ประกอบเป็นธรรมชาติมากขึ้น หนังสือเล่มนี้จะใช้สัญลักษณ์อีกแบบหนึ่งคือ **RS** เพื่อแทนความหมายเดียวกันกับ **$S \circ R$**.

ตัวอย่าง 1: ถ้าให้ A = {1,2,3}, B = {a,b,c,d}, และ C = {x,y,z}, และให้ $R \subseteq A \times B$ และ $S \subseteq B \times C$ โดยที่ R = {(1,a),(2,c),(3,a),(3,d)} และ S = {(a,x),(b,x),(b,y),(d,x),(d,z)}, จงแจกแจงสมาชิกของ RS.

<u>*วิธีทำ*</u> เมื่อ 1 R a และ a S x เราจะสรุปว่า $(1,x) \in RS$. โดยการพิจารณาเช่นนี้กับคู่อันดับแต่ละตัวใน R เราได้ RS = {(1,x),(3,x),(3,z)}.

❑

ตัวอย่าง 2: ให้เซตเอกภพ $\mathbb{U}$ คือเซตของคนทั้งหมดที่อาศัยอยู่ในประเทศไทย และให้ A = $\{x \in \mathbb{U}$: x อาศัยอยู่ในเชียงใหม่}, B = $\{x \in \mathbb{U}$: x อาศัยอยู่ในกรุงเทพฯ}, และ C = $\{x \in \mathbb{U}$: x อาศัยอยู่ในภูเก็ต}. และให้ R = $\{(x,y) \in A \times B$: x เป็นพ่อของ y}, S = $\{(x,y) \in B \times C$: x เป็นแม่ของ y}, และ T = $\{(x,y) \in B \times B$: x เป็นพ่อของ y}. จงหา RS และ TT.

<u>*วิธีทำ*</u> จากนิยามของความสัมพันธ์ประกอบ, เราได้ $RS \subseteq A \times C$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างคนเชียงใหม่กับคนภูเก็ต โดยที่

RS = $\{(x,y) \in A \times C : \exists z \in B\ ([x\ R\ z] \wedge [z\ S\ y]\}$

= $\{(x,y) \in A \times C$: มีคนกรุงเทพฯ z ซึ่ง x เป็นพ่อ z และ z เป็นแม่ y}

= $\{(x,y) \in A \times C$: x เป็นตาของ y โดยที่แม่ของ y อาศัยอยู่ในกรุงเทพฯ}

$TT \subseteq B \times B$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างคนกรุงเทพฯ ด้วยกัน โดยที่

TT = $\{(x,y) \in B \times B : \exists z \in B\ ([x\ T\ z] \wedge [z\ T\ y])\}$

= $\{(x,y) \in B \times B$: มีคนกรุงเทพฯ z ซึ่ง x เป็นพ่อของ z และ z เป็นพ่อของ y}

= $\{(x,y) \in B \times B$: x เป็นปู่ของ y โดยที่พ่อของ y อาศัยอยู่ในกรุงเทพฯ}

❑

การดำเนินการเพื่อสร้างความสัมพันธ์ประกอบจากความสัมพันธ์สองตัวมีสมบัติที่มีประโยชน์คือ **สมบัติการเปลี่ยนหมู่** (associative property) ดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้.

ทฤษฎีบท 1: สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับความสัมพันธ์ประกอบ
ให้ A, B, C, และ D เป็นเซตใดๆ และให้ $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, และ $T \subseteq C \times D$ เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคใดๆ. จะได้ $(RS)T = R(ST)$

บทพิสูจน์: เราจะพิสูจน์ $(RS)T = R(ST)$ โดยแสดงให้เห็นว่าข้อความ $(a,d) \in (RS)T$ สมมูลเชิงตรรกกับข้อความ $(a,d) \in R(ST)$ โดยใช้นิยามของความสัมพันธ์ประกอบดังนี้

$(a,d) \in (RS)T$
$\Leftrightarrow \exists c \in C([a\ RS\ c] \wedge [c\ T\ d])$ -- จากนิยามของความสัมพันธ์ประกอบ
$\Leftrightarrow \exists c \in C((\exists b \in B([a\ R\ b] \wedge [b\ S\ c])) \wedge [c\ T\ d])$ -- จากนิยามของความสัมพันธ์ประกอบ
$\Leftrightarrow \exists c \in C \exists b \in B(([a\ R\ b] \wedge [b\ S\ c]) \wedge [c\ T\ d])$ -- $\exists x(P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow (\exists x P(x)) \wedge Q$
$\Leftrightarrow \exists b \in B \exists c \in C(([a\ R\ b] \wedge [b\ S\ c]) \wedge [c\ T\ d])$ -- $\exists x \exists y\, P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\, P(x,y)$
$\Leftrightarrow \exists b \in B \exists c \in C([a\ R\ b] \wedge ([b\ S\ c] \wedge [c\ T\ d]))$ -- จากสมบัติการเปลี่ยนหมู่ของ $\wedge$
$\Leftrightarrow \exists b \in B([a\ R\ b] \wedge \exists c \in C([b\ S\ c] \wedge [c\ T\ d]))$ -- $\exists x(Q \wedge P(x)) \Leftrightarrow Q \wedge \exists x P(x)$
$\Leftrightarrow \exists b \in B([a\ R\ b] \wedge [b\ ST\ d])$ -- จากนิยามของความสัมพันธ์ประกอบ
$\Leftrightarrow (a,d) \in R(ST)$ -- จากนิยามของความสัมพันธ์ประกอบ

❑

สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับความสัมพันธ์ประกอบทำให้เราสามารถเขียนโดยไม่มีวงเล็บว่า RST เพื่อแทนความหมายทั้ง (RS)T และ R(ST) ซึ่งเราพิสูจน์แล้วว่าเท่ากัน. ยิ่งไปกว่านั้น เรายังสามารถใช้การพิสูจน์โดยอุปนัยมาพิสูจน์ได้ว่า สมบัติการเปลี่ยนหมู่นี้สามารถใช้ได้เช่นกันในกรณีของความสัมพันธ์ประกอบที่สร้างจากความสัมพันธ์มากกว่าสามตัว นั่นคือ ความสัมพันธ์ประกอบ $R_1R_2...R_n$, $n \geq 3$, สามารถเขียนได้โดยไม่ต้องใส่วงเล็บ เพราะไม่ว่าจะทำลำดับก่อนหลังอย่างไร ก็ให้ผลเดียวกัน.

นอกจากสมบัติการเปลี่ยนหมู่แล้ว การดำเนินการเพื่อสร้างความสัมพันธ์ประกอบยังมีสมบัติที่มีประโยชน์อีกอย่างหนึ่งคือ **สมบัติการแจกแจง** (distributive property) ดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้:

ทฤษฎีบท 2: สมบัติการแจกแจงสำหรับความสัมพันธ์ประกอบ
ให้ A, B, C, และ D เป็นเซตใดๆ และให้ R_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B, R_2 และ R_3 เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C, และ R_4 เป็นความสัมพันธ์จาก C ไป D. เราได้

(a) $R_1(R_2 \cup R_3) = R_1R_2 \cup R_1R_3$
(b) $R_1(R_2 \cap R_3) = R_1R_2 \cap R_1R_3$
(c) $(R_2 \cup R_3)R_4 = R_2R_4 \cup R_3R_4$
(d) $(R_2 \cap R_3)R_4 = R_2R_4 \cap R_3R_4$

บทพิสูจน์: (a) เราจะพิสูจน์ $R_1(R_2 \cup R_3) = R_1R_2 \cup R_1R_3$ โดยแสดงให้เห็นว่าข้อความ $(a,c) \in R_1(R_2 \cup R_3)$ สมมูลเชิงตรรกกับข้อความ $(a,c) \in R_1R_2 \cup R_1R_3$ โดยการสมมูลเป็นลำดับดังนี้:

$(a,c) \in R_1(R_2 \cup R_3)$
$\Leftrightarrow \exists b \in B\ ([(a,b) \in R_1] \wedge [(b,c) \in R_2 \cup R_3])$ -- จากนิยามของความสัมพันธ์ประกอบ
$\Leftrightarrow \exists b \in B\ ([a\ R_1\ b] \wedge ([b\ R_2\ c] \vee [b\ R_3\ c]))$

$\Leftrightarrow \exists b \in B\ (([a\ R_1\ b] \wedge [b\ R_2\ c]) \vee ([a\ R_1\ b] \wedge [b\ R_3\ c]))$

$\Leftrightarrow \exists b \in B\ ([a\ R_1\ b] \wedge [b\ R_2\ c]) \vee \exists b \in B\ ([a\ R_1\ b] \wedge [b\ R_3\ c])$

$\Leftrightarrow [(a,c) \in R_1R_2] \vee [(a,c) \in R_1R_3]$

$\Leftrightarrow (a,c) \in R_1R_2 \cup R_1R_3$

ผู้อ่านควรพิสูจน์ (b), (c), และ (d) เป็นแบบฝึกหัด.

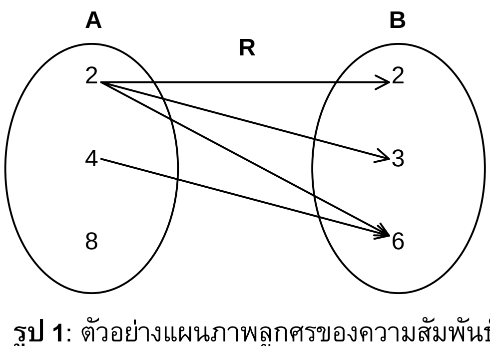
❑

การแทนความสัมพันธ์ทวิภาคด้วยแผนภาพลูกศร

ถ้าเซต A และ B เป็นเซตจำกัด, เรามีวิธีแทนความสัมพันธ์ความสัมพันธ์ทวิภาค R ใดๆ จาก A ไป B ในลักษณะ “รูปภาพ” ได้หลายวิธี. วิธีที่นิยมใช้ทั่วไปได้แก่ *แผนภาพลูกศร (arrow diagram)*, *เมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง (zero-one matrix)*, และ*ไดกราฟ (digragh)*. หัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแทนความสัมพันธ์แบบแรกคือการใช้แผนภาพลูกศร.

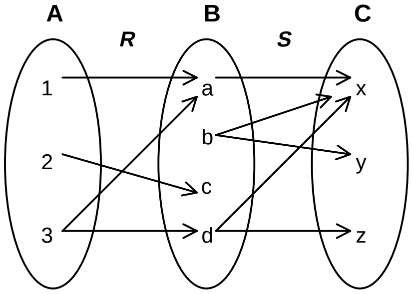
ถ้าเซต A และ B มีจำนวนสมาชิกไม่มากนัก, เราอาจแทนความสัมพันธ์ $R \subseteq A \times B$ ได้โดยเขียนเซต A และ B ทั้งสองเป็นแผนภาพวงกลมที่มีการแจกแจงสมาชิกทั้งหมดอยู่ภายใน และใช้เส้นลูกศรโยงจากสมาชิก a ของ A ไปยังสมาชิก b ของ B เมื่อใดก็ตามที่ $(a,b) \in R$. เราเรียกแผนภาพนี้ว่า **แผนภาพลูกศร** (arrow diagram) ของความสัมพันธ์ R.

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ A = {2,4,8} และ B = {2,3,6} และให้ $R = \{(x,y) \in A \times B : x \leq y\}$ เราสามารถเขียนแผนภาพลูกศรของความสัมพันธ์ R ได้ดังรูป 1.



รูป 1: ตัวอย่างแผนภาพลูกศรของความสัมพันธ์ทวิภาค

แผนภาพลูกศรมีประโยชน์เป็นพิเศษในการหาสมาชิกของความสัมพันธ์ประกอบ. รูป 2 แสดงแผนภาพลูกศรของความสัมพันธ์ R และ S ในตัวอย่าง 1 ที่เขียนอยู่ในรูปเดียวกัน. นิยามของความสัมพันธ์ประกอบ RS บอกเราว่า $(p,q) \in RS$ เมื่อและต่อเมื่อ p R r และ r S q สำหรับ r บางตัวใน B. ดังนั้นถ้าในรูป 2 เรามีเส้นทางที่โยงด้วยลูกศรต่อกันสองลูกศรจากสมาชิก p ใดๆใน A ไปยังสมาชิก q ใดๆใน C, แสดงว่า $(p,q) \in RS$. ตัวอย่างเช่น เรามีลูกศรจาก 3 ไป a และจาก a ไป x ดังนั้น $(3,x) \in RS$.



รูป 2: แผนภาพลูกศรเพื่อหาความสัมพันธ์ RS

เมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง (Zero-One Matrix)

อีกวิธีการหนึ่งที่สะดวกและกระทัดรัดในการแทนความสัมพันธ์ทวิภาคของเซตจำกัดสองเซตที่มีสมาชิกไม่มากนักคือการใช้**เมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง** (zero-one matrix). เมทริกซ์ศูนย์หนึ่งคือเมทริกซ์ที่สมาชิกแต่ละตัวมีค่าเป็น 0 หรือ 1 อย่างใดอย่างหนึ่ง. ถ้าเราให้ 0 แทนค่า**เท็จ** และให้ 1 แทนค่า**จริง** เราอาจจะเรียกเมทริกซ์ศูนย์หนึ่งได้อีกอย่างหนึ่งว่า**เมทริกซ์เชิงตรรก** (logical matrix). เราจะใช้สัญลักษณ์ $[a_{ij}]_{m\times n}$ แทนเมทริกซ์ที่มี m แถว, n คอลัมน์, โดยที่ a_{ij} แทนสมาชิกแถวที่ i คอลัมน์ที่ j ของเมทริกซ์.

เมื่อเราให้ 0 แทนค่าเท็จ และ 1 แทนค่าจริง (เหมือนอย่างที่เราใช้ F แทนค่าเท็จและ T แทนค่าจริงในบทที่ 1), เราจึงใช้โอเปอเรเตอร์เชิงตรรก $\wedge$ และ $\vee$ กับ 0 และ 1 เหมือนกับที่ใช้ในตรรกศาสตร์. กล่าวคือ ถ้าให้ x และ y แทนค่า 0 หรือ 1, เราได้

$$x \wedge y = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = y = 1 \\ 0 & \text{เมื่อเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

และ

$$x \vee y = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = 1 \text{ หรือ } y = 1 \\ 0 & \text{เมื่อเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

เพื่อประโยชน์ในการใช้เมทริกซ์ศูนย์หนึ่งแทนความสัมพันธ์ทวิภาค เราจะนิยามการดำเนินการ $\vee$ และ $\wedge$ สำหรับเมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง ดังนี้.

บทนิยาม 5: ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์หนึ่งขนาด $m\times n$ ใดๆ. $A\vee B$ และ $A\wedge B$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์หนึ่งขนาด $m\times n$ ที่มีนิยามดังนี้

$$A\vee B = [a_{ij}\vee b_{ij}]_{m\times n}$$

และ

$$A\wedge B = [a_{ij}\wedge b_{ij}]_{m\times n}$$

เราจะอ่าน $A\vee B$ ว่า *"A ออร์ B"* (A or B) และอ่าน $A\wedge B$ ว่า *"A แอนด์ B"* (A and B).

กล่าวอย่างง่ายคือ ถ้าให้ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, และ d_{ij} คือสมาชิกแถวที่ i คอลัมน์ที่ j ของเมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง A, B, $A\vee B$, และ $A\wedge B$ ตามลำดับ, เราได้ $c_{ij} = a_{ij}\vee b_{ij}$ และ $d_{ij} = a_{ij}\wedge b_{ij}$, สำหรับทุกค่า i และ j.

ตัวอย่าง 3: จงหา $A \vee B$ และ $A \wedge B$ ถ้า A และ B คือเมทริกซ์ศูนย์หนึ่งขนาด 2×3 ดังนี้:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>*วิธีทำ*</u> จากบทนิยาม 5 เราได้

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

และ
$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

❑

การดำเนินการอีกอย่างหนึ่งของเมทริกซ์ศูนย์หนึ่งที่จะใช้ประโยชน์ในหัวข้อย่อยต่อไปคือ **ผลคูณแบบบูล** ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้.

บทนิยาม 6: ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ และ $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์หนึ่งใดๆ. **ผลคูณแบบบูล** (Boolean product) **ของ A และ B**, เขียนแทนด้วย $A \odot B$, คือเมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง $[c_{ij}]_{m \times n}$ โดยที่

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj})$$

จะเห็นว่าการหาผลคูณแบบบูลมีขั้นตอนเหมือนกับการคูณเมทริกซ์ธรรมดา เพียงแต่ใช้ $\wedge$ แทนการคูณ และ $\vee$ แทนการบวกระหว่างสมาชิกของเมทริกซ์ทั้งสอง. ให้สังเกตด้วยว่า เมทริกซ์ตัวแรกจะต้องมีจำนวนคอลัมน์เท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ตัวหลัง จึงจะหาผลคูณแบบบูลของเมทริกซ์ทั้งสองได้.

ตัวอย่าง 4: จงหาผลคูณแบบบูลของเมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง A และ B ต่อไปนี้:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>*วิธีทำ*</u> เนื่องจาก A มีขนาด 2×3 และ B มีขนาด 3×2, เราได้ $A \odot B$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 ดังนี้

$$A \odot B = \begin{bmatrix} (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

❑

การแทนความสัมพันธ์ทวิภาคด้วยเมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง

ก่อนที่เราจะแทนความสัมพันธ์ R จากเซต A ไปเซต B ด้วยเมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง เราจะต้องกำหนดอันดับของสมาชิกใน A และ B เสียก่อน ซึ่งเราจัดอันดับได้ตามใจชอบ. เราจะเรียกสมาชิกตัวที่ i ใน A และ B ว่า a_i และ b_i ตามลำดับ. ถ้า $|A| = m$ โดย $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ และ $|B| = n$ โดย $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, ความสัมพันธ์ R ใดๆ จาก A ไป B จะแทนได้ด้วยเมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง M_R ขนาด $m \times n$ โดยที่สมาชิกแถวที่ i คอลัมน์ที่ j ของ M_R คือ m_{ij} จะมีค่าดังนี้

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{ถ้า } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ เมทริกซ์ศูนย์หนึ่งทำหน้าที่เป็นตารางของ A×B โดยแถวที่ i ของเมทริกซ์เป็นของ a_i ใน A ในขณะที่คอลัมน์ที่ j ของเมทริกซ์เป็นของ b_j ใน B; และค่าในแถวที่ i คอลัมน์ที่ j ของเมทริกซ์ เป็นตัวบ่งบอกว่าคู่อันดับ (a_i,b_j) ใน A×B อยู่ในความสัมพันธ์นั้นหรือไม่.

ตัวอย่าง 5: ถ้าให้ A = {1,2,3} และ B = {w,x,y,z}, จงเขียนเมทริกซ์ศูนย์หนึ่งแทนความสัมพันธ์ R จาก A ไป B โดย R = {(1,w),(2,y),(3,w),(3,z)}.

วิธีทำ ก่อนอื่นเราจะต้องกำหนดอันดับของสมาชิกในเซตทั้งสองเสียก่อน. เราให้ a_1 = 1, a_2 = 2, และ a_3 = 3, และให้ b_1 = w, b_2 = x, b_3 = y, และ b_4 = z. ดังนั้นเมทริกซ์ศูนย์หนึ่ง M_R ที่แทนความสัมพันธ์ R คือ

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

❑

พึงตระหนักว่า เมทริกซ์ศูนย์หนึ่งที่ใช้แทนความสัมพันธ์หนึ่งๆนั้นจะแตกต่างออกไปถ้าเราเปลี่ยนอันดับสมาชิกใน A และ/หรือ B. ในบางครั้งเพื่อความสะดวก เราอาจเขียนเมทริกซ์ศูนย์หนึ่งที่แทนความสัมพันธ์ในรูปตารางที่มีการบ่งบอกอย่างชัดเจนว่าแต่ละแถวและแต่ละคอลัมน์ของเมทริกซ์เป็นของสมาชิกตัวใดใน A และ B. ตัวอย่างเช่นเราอาจเขียนเมทริกซ์ M_R ในตัวอย่าง 3 เป็น

	w	**x**	**y**	**z**
1	1	0	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1

เมื่อเราใช้เมทริกซ์ศูนย์หนึ่งแทนความสัมพันธ์ทวิภาค สิ่งที่น่าสนใจคือโอเปอเรเตอร์ $\vee$, $\wedge$, และ $\odot$ สำหรับเมทริกซ์ศูนย์หนึ่งที่นิยามในหัวข้อย่อยที่แล้ว มีความเกี่ยวโยงกับการดำเนินการต่างๆ ระหว่างความสัมพันธ์อย่างไร. ทฤษฎีบทต่อไปนี้คือคำตอบ.

ทฤษฎีบท 3: ถ้าให้ A, B, และ C เป็นเซตจำกัดใดๆ และให้ R $\subseteq$ A×B, S $\subseteq$ A×B, และ T $\subseteq$ B×C เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคใดๆ โดยมี M_R, M_S, และ M_T เป็นเมทริกซ์ศูนย์หนึ่งที่แทนความสัมพันธ์ทั้งสามตามลำดับ, จะได้เมทริกซ์ศูนย์หนึ่งที่ใช้แทนความสัมพันธ์ R∪S, R∩S, และ RT คือ

$$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S$$

$$M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S$$

และ

$$M_{RT} = M_R \odot M_T$$

บทพิสูจน์: ผู้อ่านควรพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ด้วยตนเองเป็นแบบฝึกหัด.
❑

ตัวอย่าง 6: ถ้าให้ A = {1,2,3}, B = {a,b,c,d}, และ C = {x,y,z}, และให้ $R \subseteq A \times B$ และ $S \subseteq B \times C$ โดยที่ R = {(1,a),(2,c),(3,a),(3,d)} และ S = {(a,x),(b,x),(b,y),(d,x),(d,z)}, จงหา RS โดยใช้เมทริกซ์ศูนย์หนึ่งของ R และ S.

<u>*วิธีทำ*</u> ถ้าใช้ลำดับของสมาชิกใน A, B, C เป็นดังที่แจกแจงในโจทย์. เราได้เมทริกซ์ที่แทน R และ S คือ

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 3 เราหาเมทริกซ์ที่แทน RS ได้ดังนี้

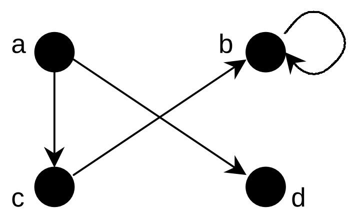
$$M_{RS} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จากเมทริกซ์ M_{RS} ข้างบน เราได้ RS = {(1,x),(3,x),(3,z)} ตรงกับตัวอย่าง 1 ข้างบน.
❑

การแทนความสัมพันธ์ทวิภาคด้วยไดกราฟ

เราอาจแทนความสัมพันธ์ทวิภาค R บนเซต A ใดๆ เป็นแผนภาพที่เรียกว่า **กราฟระบุทิศทาง** (directed graph) หรือที่เรียกสั้นๆว่า **ไดกราฟ** (digraph).

ไดกราฟประกอบด้วยกลุ่มของ**จุดยอด** (vertex) จำนวนจำกัดและกลุ่มของ**เส้นเชื่อม** (edge) ที่มีทิศทางจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่ง. เรามักจะแทนไดกราฟด้วยแผนภาพ โดยใช้จุดแทนจุดยอดแต่ละตัว และใช้เส้นลูกศรจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่งแทนเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดแต่ละคู่. ตัวอย่างเช่น แผนภาพในรูป 3 แทนไดกราฟหนึ่งที่มี a, b, c, และ d เป็นจุดยอด และมีเส้นเชื่อมทั้งหมด 4 เส้น คือ เส้นเชื่อมจาก a ไป c, เส้นเชื่อมจาก a ไป d, เส้นเชื่อมจาก b ไป b, และเส้นเชื่อมจาก c ไป b.



รูป 3: แผนภาพไดกราฟ

จะเห็นว่าไดกราฟอาจมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดเดียวกันได้ ดังเช่นเส้นเชื่อมจาก b ไป b ในไดกราฟข้างบน. เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดเดียวกันนี้เรียกว่า**ลูป** (loop) เพราะมีลักษณะเป็นลูกศรหมุนวนเข้าหาตัวเองดังในรูป 3.

เราจะนิยามไดกราฟเป็นวัตถุทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไร? ไดกราฟเป็นโครงสร้างที่มีองค์ประกอบสองส่วนคือกลุ่มของจุดยอดและกลุ่มของเส้นเชื่อม ดังนั้นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมสำหรับไดกราฟก็คือคู่อันดับของเซตจำกัดสองเซต คือเซตของจุดยอดทั้งหมดและเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมดในไดกราฟนั้น. เราจะแทน*เส้นเชื่อมจากจุดยอด a ไปยังจุดยอด b* ด้วยคู่อันดับ (a,b). ถ้าให้ V เป็นเซตของจุดยอดทั้งหมด และ E เป็นเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมด, E ก็คือสับเซตหนึ่งของ V×V นั่นเอง. เราจึงได้บทนิยามอย่างเป็นทางการของไดกราฟดังนี้.

บทนิยาม 7: **กราฟระบุทิศทาง** (directed graph) หรือเรียกสั้นๆว่า**ไดกราฟ** (digraph) G คือคู่อันดับ (V,E) โดยที่ V คือเซตจำกัดของ**จุดยอด** (vertex) ทั้งหมดใน G และ E คือเซตจำกัดของ**เส้นเชื่อม** (edge) ทั้งหมดใน G โดย E $\subseteq$ V×V. สำหรับเส้นเชื่อม (a,b) ใดๆใน E, เราเรียก a ว่าเป็น**จุดยอดต้น** (initial vertex) และเรียก b ว่าเป็น**จุดยอดปลาย** (terminal vertex) ของเส้นเชื่อมนั้น. เส้นเชื่อมที่มีจุดยอดต้นและจุดยอดปลายเป็นตัวเดียวกันเรียกว่า**ลูป** (loop).

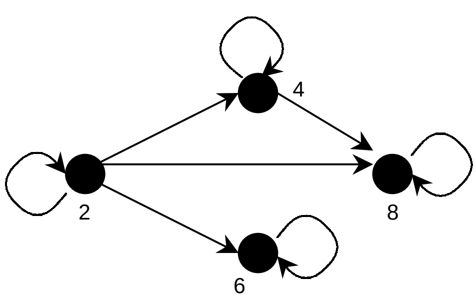
ตัวอย่างเช่น แผนภาพในรูป 3 ข้างบนแทนไดกราฟ G = (V,E) โดยที่ V = {a,b,c,d} และ E = {(a,c),(a,d),(b,b),(c,b)}. c เป็นจุดยอดต้นและ b เป็นจุดยอดปลายของเส้นเชื่อม (c,b). เส้นเชื่อม (b,b) เป็นลูปเพียงลูปเดียวที่มีอยู่ในไดกราฟนี้.

ไดกราฟใช้แทนความสัมพันธ์ทวิภาคบนเซตจำกัดใดๆได้เพราะวัตถุทางคณิตศาสตร์ทั้งสองนี้สมนัยกันอย่างใกล้ชิดเหมือนเป็นสองด้านของเหรียญเดียวกัน. จากบทนิยามของไดกราฟ G = (V,E) ข้างบน, การที่ E $\subseteq$ V×V แสดงว่า E ก็คือความสัมพันธ์ทวิภาคบนเซต V นั่นเอง. ในทางกลับกัน ถ้าเรามีความสัมพันธ์ R ใดๆ บนเซตจำกัด A ใดๆ, เราจะได้ไดกราฟ G ที่นิยามจากความสัมพันธ์ R นี้ โดยให้ A เป็นเซตของจุดยอดทั้งหมดของ G และ R $\subseteq$ A×A คือเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมดใน G. ผลโดยตรงที่ได้จากความสมนัยนี้คือ

สำหรับเซตจำกัด A ใดๆ ไดกราฟที่ใช้แทนความสัมพันธ์ทวิภาค R บนเซต A คือ G = (A,R).

ตัวอย่าง 7: ให้ A = {2,4,6,8} และ R = {(x,y)∈ A×A : x หาร y ลงตัว} จงเขียนแผนภาพของไดกราฟที่ใช้แทนความสัมพันธ์ R.

<u>*วิธีทำ*</u> เราได้ R = {(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(4,4),(4,8),(6,6),(8,8)}. ไดกราฟ G = (A,R) ที่ใช้แทน R มีสมาชิกแต่ละตัวใน A เป็นจุดยอด และคู่อันดับแต่ละตัวใน R เป็นเส้นเชื่อมใน G ดังแสดงในรูป.



❑

ความสัมพันธ์ n-ภาค (N-ary Relations)

ความสัมพันธ์ทวิภาค $R \subseteq A \times B$ เป็นการนิยามความสัมพันธ์แบบหนึ่งระหว่างสมาชิกในเซตสองเซต นั่นคือการที่ (a,b) อยู่ใน R จะมีความหมายว่า *a สัมพันธ์แบบ R กับ b*. เราอาจขยายมโนทัศน์เรื่องความสัมพันธ์ออกไปเป็นความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกในเซตมากกว่าสองเซตได้. ตัวอย่างเช่น ถ้าเราให้ A คือเซตของนิสิตปัจจุบันทั้งหมดของมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, B คือเซตของรหัสรายวิชาทั้งหมดที่เปิดสอนในมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, และ C คือเซตของเกรดที่เป็นไปได้ทั้งหมดของแต่ละรายวิชา นั่นคือ C = {4.0,3.5,3.0,2.5,2.0,1.5,1.0,0}. เราอาจจะนิยามความสัมพันธ์ R เป็นความสัมพันธ์ระหว่างเซต A, B, และ C โดยที่ *นิสิต x ใน A, รายวิชา y ใน B, และเกรด z ใน C จะสัมพันธ์กันแบบ R* เมื่อและต่อเมื่อ *นิสิต x เคยเรียนรายวิชา y และได้เกรด z ในรายวิชานั้น*. เราจะแทนความสัมพันธ์ R ระหว่างเซตทั้งสามนี้ด้วยเซตของทริเปิล $\{(x,y,z) \in A \times B \times C$: x เคยเรียนรายวิชา y และได้เกรด z ในรายวิชานั้น}. และเราจะเรียกความสัมพันธ์ R ระหว่างเซต 3 เซตนี้ว่า **ความสัมพันธ์ไตรภาค** (ternary relation) ระหว่างเซต A, B, และ C. และถ้าพิจารณาโดยนามธรรมแล้ว สับเซตทุกสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B \times C$ ก็คือความสัมพันธ์ไตรภาคระหว่างเซตทั้งสามทั้งสิ้น.

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถนิยามความสัมพันธ์ระหว่างเซต 4 เซต, ระหว่างเซต 5 เซต, ... ได้เช่นกัน. เราจะเรียกความสัมพันธ์ระหว่างเซต n เซต, โดย $n \geq 2$, ว่า **ความสัมพันธ์ n-ภาค** (n-ary relation) ระหว่างเซต n เซตนั้น ดังในบทนิยามต่อไปนี้.

บทนิยาม 8: ให้ $A_1, A_2, \ldots,$ และ A_n เป็นเซตใดๆ โดย $n \geq 2$. เราเรียกสับเซต R ใดๆ ของ $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ว่า **ความสัมพันธ์ n-ภาค ระหว่างเซต $A_1, A_2, \ldots, A_n$** (n-ary relation on $A_1, A_2, \ldots, A_n$). เมื่อ $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R$, เราจะกล่าวว่า **$x_1, x_2, \ldots, x_n$ สัมพันธ์กันแบบ R**, และเมื่อ $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \notin R$, เราจะกล่าวว่า **$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ไม่สัมพันธ์กันแบบ R**.

ถ้าเซต $A_1, A_2, \ldots,$ และ A_n คือเซตเดียวกันทั้งหมดคือเซต A, เราจะเรียก R ว่า **ความสัมพันธ์ n-ภาคบนเซต A** (n-ary relation on A).

เมื่อ n = 2 และ 3, เราจะเรียกความสัมพันธ์ n-ภาคว่า **ความสัมพันธ์ทวิภาค** (binary relation) และ **ความสัมพันธ์ไตรภาค** (ternary relation) ตามลำดับ.

ตัวอย่าง 8: ให้ A = {1,2}, B = {5,6}, และ C = {5,7,9}. จงแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของความสัมพันธ์ไตรภาค $R = \{(x,y,z) \in A \times B \times C : x+y > z\}$.

<u>*วิธีทำ*</u> ในบรรดาทริเปิลใน $A \times B \times C$ มีทั้งหมด $2 \times 2 \times 3=12$ ตัว มีอยู่เพียง 5 ตัวเท่านั้นที่ผลบวกขององค์ประกอบสองตัวแรกมีค่ามากกว่าองค์ประกอบตัวที่สาม. ดังนั้นเราได้

$$R = \{(1,5,5),(1,6,5),(2,5,5),(2,6,5),(2,6,7)\}$$

เราเรียก $R \subseteq A \times B \times C$ นี้ว่าเป็นความสัมพันธ์ไตรภาคระหว่างเซต A, B, และ C. และเนื่องจาก $(1,5,5) \in R$, เรากล่าวว่า 1 ใน A, 5 ใน B, และ 5 ใน C สัมพันธ์กันแบบ R.

❑

ตัวอย่าง 9: ให้ R เป็นความสัมพันธ์ 4-ภาคบนเซตจำนวนนับ $\mathbb{N}$ โดยที่ $(a,b,c,d) \in R$ เมื่อและต่อเมื่อ abcd = 2. จงแจกแจงสมาชิกทั้งหมดใน R.

<u>*วิธีทำ*</u> เราได้ R $= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : abcd = 2\}$

$= \{(2,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,1,1,2)\}$.

❑

ผู้ที่มีรสนิยมวิไลในภาษาบาลีสันสกฤต (หรือละติน) อาจเรียกความสัมพันธ์ 4-ภาค (เช่น R ในตัวอย่าง 9 ข้างบน) ว่า **ความสัมพันธ์จตุภาค** (quaternary relation) ก็ได้.

ความสัมพันธ์เอกภาค (Unary Relation)

บทนิยาม 8 ข้างบนนิยามความสัมพันธ์ n-ภาคโดย n มีค่าตั้งแต่สองขึ้นไป. เราอาจขยายบทนิยามนี้ให้ครอบคลุมถึงกรณี n = 1 ด้วย โดยเราจะเรียก *ความสัมพันธ์ 1-ภาค* นี้ว่า **ความสัมพันธ์เอกภาค** (unary relation). เราจะให้นิยามความสัมพันธ์เอกภาพอย่างไรจึงจะสอดคล้องกลมกลืนกับนิยามของความสัมพันธ์ n-ภาคในบทนิยาม 8?

จากบทนิยาม 8 ความสัมพันธ์ n-ภาคบนเซต A เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A จำนวน n เซต. ดังนั้น เราจึงควรให้นิยาม*ความสัมพันธ์เอกภาคบน A* เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A จำนวน 1 เซต ซึ่งก็คือเซต A นั่นเอง. กล่าวให้ง่ายขึ้นคือ *สับเซตใดๆของเซต A ก็คือความสัมพันธ์เอกภาคบนเซต A* นั่นเอง. ดังนั้นเราได้นิยามของความสัมพันธ์เอกภาพดังต่อไปนี้.

บทนิยาม 9: ให้ A เป็นเซตใดๆ. เราเรียกสับเซตใดๆของ A ว่า **ความสัมพันธ์เอกภาคบนเซต A** (unary relation on A).

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ A = {1,2,3}, สับเซตทั้งแปดของ A คือ $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, และ {1,2,3} ล้วนเป็นความสัมพันธ์เอกภาคบนเซต A ทั้งสิ้น. เซตจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ ก็เรียกได้ว่าเป็นความสัมพันธ์เอกภาคบนเซตจำนวนจริง $\mathbb{R}$ เพราะ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

แม้ว่าจะเป็นเรื่องยากที่จะหาความหมายเชิงรูปธรรมของความสัมพันธ์เอกภาค แต่นิยามของมันก็ช่วยให้มโนทัศน์เรื่องความสัมพันธ์มีความสมบูรณ์ในเชิงนามธรรมมากขึ้น ไม่ต่างจากที่เรานิยามให้ $x^0 = 1$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ หรือให้ 0! = 1 แล้วทำให้โลกคณิตศาสตร์เกิดความสงบสุขอย่างประหลาด!

2.3 ฟังก์ชัน (function)

ฟังก์ชันเป็นภาษาของคณิตศาสตร์ที่สำคัญอย่างยิ่ง เพราะมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์มากมายมหาศาลที่ต้องใช้มโนทัศน์ของฟังก์ชันเป็นรากฐาน. ผู้อ่านส่วนใหญ่คงจะคุ้นเคยกับฟังก์ชันมาตั้งแต่ชั้นมัธยมปลาย ดังนั้นหัวข้อย่อยนี้จะเป็นการทบทวนนิยามและการดำเนินการต่าง ๆเกี่ยวกับฟังก์ชันอย่างค่อนข้างรวบรัด.

มโนทัศน์พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชัน

ฟังก์ชันจากเซตหนึ่งไปอีกเซตหนึ่งเป็นความสัมพันธ์ทวิภาคชนิดพิเศษระหว่างเซตทั้งสองดังบทนิยามต่อไปนี้:

บทนิยาม 1: ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ. เราจะเรียกความสัมพันธ์ f จาก A ไป B ที่มีคุณสมบัติพิเศษคือ

สำหรับแต่ละ x ใน A, จะมี y เพียงหนึ่งเดียวใน B ที่ $(x,y) \in f$.

ว่า **ฟังก์ชัน** (function) **f จาก A ไป B**, เขียนแทนด้วย $f{:}A \longrightarrow B$. เราเรียกเซต A ว่าเป็น**โดเมน** (domain) ของ f, เขียนแทนด้วย dom(f), และเรียกเซต B ว่าเป็น**โคโดเมน** (codomain) ของ f. ถ้า $(x,y) \in f$, เราจะเรียก y ว่าเป็น**ค่าฟังก์ชัน f ที่ x**, เขียนแทนด้วย $f(x) = y$, และเรียก x ว่าเป็น**อาร์กิวเมนต์** (argument) ของฟังก์ชัน f.

เราเรียก*เซตของสมาชิกทั้งหมดใน B ที่เป็นค่าฟังก์ชัน f ที่ x บางตัวใน A* ว่า**เรนจ์** (range) ของฟังก์ชัน f, เขียนแทนด้วย range(f). นั่นคือ $\mathrm{range}(f) = \{y \in B : \exists x \in A\ [y = f(x)]\}$.

ให้สังเกตว่า เราให้นิยามของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไม่แตกต่างจากนิยามของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ เพราะฟังก์ชันก็คือความสัมพันธ์แบบหนึ่ง. และให้สังเกตด้วยว่า สำหรับความสัมพันธ์ R ใด ๆจาก A ไป B ที่เป็นฟังก์ชัน, dom(R) = A เสมอ.

ตัวอย่างของความสัมพันธ์ทวิภาคที่เป็นฟังก์ชันได้แก่ $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : y = x^2\}$. ความสัมพันธ์ R เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{Z}$ ไป $\mathbb{N}$ เพราะสำหรับจำนวนเต็ม x แต่ละตัว จะหาค่าจำนวนนับ x^2 ได้เสมอและได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น. เราเขียน $R(x) = x^2$ แทนข้อความที่ว่า *ค่าฟังก์ชัน R ที่ x คือ* x^2 เช่น $R(-3) = 9$.

บทนิยาม 1 ข้างบนบอกเราว่า เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ความสัมพันธ์ f จาก A ไป B จะเป็นฟังก์ชันมีสองประการคือ 1) f(x) จะต้องหาค่าได้ทุก x ในโดเมน A และ 2) f(x) จะต้องมีค่าเดียวสำหรับแต่ละ x ในโดเมน. นักคณิตศาสตร์มักกล่าวถึงความสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติทั้งสองดังกล่าวว่าเป็น ***ฟังก์ชันที่มีนิยามแจ่มชัด*** *(well-defined function)* แต่อันที่จริงเราไม่มีสิ่งที่เรียกว่า *ฟังก์ชันที่มีนิยาม<u>ไม่</u>แจ่มชัด* เพราะถ้ามีอะไรเช่นนั้น มันก็ไม่ใช่ฟังก์ชันแต่แรกแล้ว.

เรามีชื่อให้กับฟังก์ชันที่มีสมบัติพิเศษบางอย่างดังบทนิยามต่อไปนี้.

บทนิยาม 2: ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ. ฟังก์ชัน f จาก A ไป B จะเรียกว่าเป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** (*one-to-one function* หรือ *injective function* หรือ *injection*) ถ้า f มีสมบัติดังนี้:

สำหรับทุก x และ y ในโดเมน, ถ้า $x \neq y$, จะได้ $f(x) \neq f(y)$.

บทนิยาม 3: ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ. ฟังก์ชัน f จาก A ไป B จะเรียกว่าเป็น**ฟังก์ชันทั่วถึง** (*onto function* หรือ *surjective function* หรือ *surjection*) ถ้า f มีสมบัติดังนี้:

สำหรับทุก y ในโคโดเมน, จะมี x ในโดเมนซึ่ง f(x) = y.

หรือกล่าวโดยย่อคือ *range(f) เท่ากับโคโดเมนของ f.*

บทนิยาม 4: ฟังก์ชัน f ใดๆ จะเรียกว่าเป็น**ฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง** (*bijective function* หรือ *bijection*) ถ้า f เป็นทั้งฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันทั่วถึง. เราอาจเรียก*ฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจากเซต A ไปเซต B* ได้อีกอย่างหนึ่งว่า **การสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างเซต A และ B** (one-to-one correspondence between A and B).

ตัวอย่าง 1: จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันชนิดใด.

(ก) f: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ โดยที่ $f(n) = n^2$.

(ข) g: $\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ โดยที่ $g(x) = y^2$.

(ค) h: $\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ โดยที่ $h(x) = x+1$.

<u>*วิธีทำ*</u> ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะสำหรับทุกจำนวนนับ m และ n, ถ้า $m \neq n$, จะได้ $m^2 \neq n^2$. แต่ f ไม่ใช่ฟังก์ชันทั่วถึง เพราะมีจำนวนนับบางตัวเช่น 2 ที่ไม่เป็นกำลังสองของจำนวนนับใดเลย.

ฟังก์ชัน g ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะ $g(-1) = g(1) = 1$ แต่ $-1 \neq 1$. และ g ก็ไม่ใช่ฟังก์ชันทั่วถึงเช่นกัน เพราะมีจำนวนเต็มบางตัวเช่น 2 ที่ไม่เป็นกำลังสองของจำนวนเต็มใดเลย.

ฟังก์ชัน h เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะถ้า $h(x) = x+1 = h(y) = y+1$ แล้ว, x จะต้องเท่ากับ y. นอกจากนี้ h ก็เป็นฟังก์ชันทั่วถึงด้วยเช่นกัน เพราะสำหรับทุกจำนวนเต็ม y จะมีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x+1 = y$. (จำนวนเต็ม x ดังกล่าวก็คือค่า $y-1$)

เนื่องจาก h เป็นทั้งฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้น h เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง. ❏

ฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งที่น่าสนใจคือ **ฟังก์ชันเอกลักษณ์** (identity function) ซึ่งมีนิยามดังนี้:

บทนิยาม 5: ให้ A เป็นเซตใดๆ. **ฟังก์ชันเอกลักษณ์บนเซต A** (identity function on A) คือฟังก์ชัน $\mathbf{1}_A: A\rightarrow A$ ซึ่ง $\mathbf{1}_A(x) = x$ ทุก $x \in A$.

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ A = {1,2,3}, จะได้ $\mathbf{1}_A(1) = 1$, $\mathbf{1}_A(2) = 2$, และ $\mathbf{1}_A(3) = 3$.

สมสัณฐานตามธรรมชาติ (Natural Isomorphism)

ให้ A และ B เป็นเซตสองเซตใดๆ ถ้าเรามีฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง f จาก A ไป B ที่เป็นการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง*อย่างง่าย*จนกระทั่งทำให้ x และ f(x) คล้ายคลึงกันมากจนแทบจะเป็นสิ่งเดียวกัน, เราจะเรียกการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง f นี้ว่าเป็น**สมสัณฐานตามธรรมชาติระหว่างเซต A และ B** (natural isomorphism between A and B), และกล่าวว่า x และ f(x) ***สมสัณฐานตามธรรมชาติซึ่งกันและกัน*** *(naturally isomorphic)*. เนื่องจากสมาชิก x ในเซต A กับค่า f(x) ในเซต B มีความคล้ายคลึงกันมาก, ดังนั้นในบางบริบท เราอาจมองว่า x และ f(x) เป็นสิ่งที่ไม่แตกต่างกัน และอนุโลมใช้แทนกันได้ประหนึ่งว่าเป็นสิ่งเดียวกัน.

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ A, B, และ C เป็นเซตใดๆ, เรามีการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งอย่างง่ายระหว่างเซต $A \times B \times C$ กับเซต $(A \times B) \times C$ คือ

$$f: A \times B \times C \longrightarrow (A \times B) \times C \text{ ซึ่ง } f((x,y,z)) = ((x,y),z) \text{ ทุก } (x,y,z) \in A \times B \times C.$$

จะเห็นว่า (x,y,z) และค่าฟังก์ชัน f ของมันคือ ((x,y),z) มีความคล้ายคลึงกันจนแทบจะเรียกได้ว่าเป็นสิ่งเดียวกัน ดังนั้นเราจึงอาจเรียกฟังก์ชัน f นี้ว่าเป็น*สมสัณฐานตามธรรมชาติ*ระหว่าง $A \times B \times C$ และ $(A \times B) \times C$ ได้. ดังนั้นในบางบริบทเราอาจมองว่าทริเปิล $(a,b,c) \in A \times B \times C$ กับคู่อันดับ $((a,b),c) \in (A \times B) \times C$ เป็นสิ่งที่ไม่แตกต่างกันและใช้แทนกันและกันได้.

อีกตัวอย่างของสมสัณฐานตามธรรมชาติที่มีประโยชน์คือการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างเซต $A \times A$, โดย A เป็นเซตจำกัดใดๆ, กับเซต **D** ของไดกราฟทั้งหมดที่มี A เป็นเซตของจุดยอด. เรานิยามการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่าง $A \times A$ และ **D** เป็นการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งกันระหว่างความสัมพันธ์ $R \subseteq A \times A$ กับไดกราฟ (A,R). นั่นคือ R คือเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมดในไดกราฟนั้น. ด้วยเหตุนี้เราจึงอาจถือว่าความสัมพันธ์ทวิภาค R บนเซตจำกัด A ใดๆ กับไดกราฟ (A,R) เป็นสิ่งที่ใช้แทนกันได้ราวกับว่าเป็นสิ่งเดียวกันดังที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2.2 ในเรื่องของการแทนความสัมพันธ์ทวิภาคด้วยไดกราฟ.

อนึ่ง พึงตระหนักว่า เราไม่มีนิยามที่ชัดเจนที่จะบ่งบอกว่าการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งอย่างง่ายตัวใดเป็นหรือไม่เป็นสมสัณฐานตามธรรมชาติ (เพราะไม่มีนิยามทางคณิตศาสตร์ของคำว่า “อย่างง่าย”). การจะเรียกฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง f ใดว่าเป็นสมสัณฐานตามธรรมชาตินั้น, x และ f(x) จะต้องมีความคล้ายคลึงใกล้เคียงกันมากพอที่จนสามารถอนุโลมได้ว่าเป็นสิ่งเดียวกันได้ในบริบทที่เรากำลังพิจารณา.

ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันผกผันได้

(Inverse Functions and Invertible Functions)

อย่างที่ทราบแล้วว่า ฟังก์ชัน $R: A \longrightarrow B$ ใดๆ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แบบหนึ่ง ดังนั้นเราย่อมหาความสัมพันธ์ผกผัน R^{-1} ของฟังก์ชัน R ได้เสมอ. แต่ทว่าความสัมพันธ์ผกผันของฟังก์ชัน R ดังกล่าวอาจจะเป็นหรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้. เมื่อพิจารณาให้ดีจะพบว่า เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ความสัมพันธ์ผกผัน $R^{-1} \subseteq B \times A$ ของฟังก์ชัน $R: A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน $R^{-1}: B \longrightarrow A$ ได้ ก็คือ *ฟังก์ชัน R จะต้องเป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง* ดังสรุปเป็นทฤษฎีบทต่อไปนี้.

ทฤษฎีบท 1: ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ และให้ความสัมพันธ์ $R \subseteq A \times B$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B. จะได้ว่า *ความสัมพันธ์ผกผันของ R จะเป็นฟังก์ชัน เมื่อและต่อเมื่อ R เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง.*

บทพิสูจน์:

ผู้อ่านควรพิจารณาหาความสมเหตุสมผลของทฤษฎีบทนี้เป็นแบบฝึกหัด.

❑

เราจะใช้ความจริงในทฤษฎีบท 1 ข้างบนมานิยามมโนทัศน์ใหม่ที่เรียกว่า **ฟังก์ชันผกผัน** (inverse function) ของฟังก์ชัน $f:A\longrightarrow B$ ดังนี้.

บทนิยาม 6: ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ และ f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B. **ฟังก์ชันผกผันของ f** (inverse function of f), เขียนแทนด้วย f^{-1}, คือฟังก์ชันจาก B ไป A ซึ่ง

$f^{-1}(b) = a$ เมื่อและต่อเมื่อ $f(a) = b$, สำหรับทุก $b\in B$ และทุก $a\in A$

ตัวอย่าง 2: จงหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}^+$ โดยที่ $f(x) = x+1$.

วิธีทำ ก่อนอื่นควรตรวจสอบก่อนว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ เพราะถ้าไม่เป็น, f จะไม่มีฟังก์ชันผกผัน. เมื่อพิจารณาดูจะพบว่า f เป็นทั้งฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ดังนั้นจึงเป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง.

จากบทนิยาม 6 จะได้ว่า $f^{-1}(x) = y$ เมื่อและต่อเมื่อ $f(y) = y+1 = x$; นั่นคือ $y = x-1$. ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของ f คือ $f^{-1}:\mathbb{Z}^+\longrightarrow\mathbb{N}$ โดยที่ $f^{-1}(x) = x-1$.

❑

ทฤษฎีบท 1 และบทนิยาม 6 บอกเราว่าเราจะหาฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ของฟังก์ชัน f ได้ เมื่อและต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง. ด้วยเหตุนี้ เราจะเรียก*ฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง*อีกอย่างหนึ่งว่า **ฟังก์ชันผกผันได้** (invertible function). นั่นคือ ฟังก์ชัน f^{-1} คือ*ฟังก์ชันผกผัน*ของ*ฟังก์ชันผกผันได้* f.

ความจริงต่อไปนี้เป็นผลโดยตรงจากนิยามของฟังก์ชันผกผันที่ผู้อ่านควรพิสูจน์ด้วยตนเองได้.

ทฤษฎีบท 2: สำหรับฟังก์ชัน f ใดๆที่เป็นฟังก์ชันผกผันได้, f^{-1} เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง.

ฟังก์ชันค่าจริง (Real-Valued Functions)

ถ้าให้ A เป็นเซตใดๆ, เราเรียกฟังก์ชัน f ใดๆ จาก A ไป $\mathbb{R}$ ว่า**ฟังก์ชันค่าจริง** (real-valued function) เพราะ f(x) เป็นจำนวนจริงทุกค่า x ในโดเมน. ถ้าเรามีฟังก์ชันค่าจริงสองฟังก์ชันที่มีโดเมนเดียวกัน, เราสามารถสร้างฟังก์ชันค่าจริงใหม่บนโดเมนเดิมได้ดังบทนิยามต่อไปนี้.

บทนิยาม 7: ให้ A เป็นเซตใดๆ และให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไป $\mathbb{R}$. ฟังก์ชัน f+g และฟังก์ชัน fg คือฟังก์ชันจาก A ไป $\mathbb{R}$ โดยที่

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

และ $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

สำหรับทุกค่า x ใน A.

ฟังก์ชัน f+g และ fg ดังในบทนิยามข้างบนมีนิยามแจ่มชัด เพราะหาค่าได้และหาค่าได้ค่าเดียวเสมอสำหรับ x แต่ละตัวในโดเมน. นี่เป็นผลโดยตรงจากสมบัติการบวกและคูณในระบบจำนวนจริง.

ตัวอย่าง 3: ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}-\{0\}$ ไป $\mathbb{R}$ โดยที่ $f(x) = 1/x$ และ $g(x) = x^2-(1/x)$. จงหา f+g และ fg.

<u>*วิธีทำ*</u> f+g และ fg เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}-\{0\}$ ไป $\mathbb{R}$ โดยที่

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (1/x)+(x^2-(1/x)) = x^2.$$

และ

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (1/x)(x^2-(1/x)) = x-(1/x^2)$$

ตัวอย่างเช่น $(f+g)(2) = 2^2 = 4$ และ $(fg)(1) = 1-(1/1^2) = 0$.

❑

ฟังก์ชันประกอบ (Composite Functions)

จากนิยามของฟังก์ชันในบทนิยาม 1, ฟังก์ชัน $f:A\rightarrow B$ และฟังก์ชัน $g:B\rightarrow C$ ใดๆ ก็คือความสัมพันธ์ทวิภาคจาก A ไป B และจาก B ไป C ตามลำดับ. ดังนั้นเราสามารถหาความสัมพันธ์ประกอบ $g\circ f \subseteq A\times C$ ได้โดยตรงจากนิยาม นั่นคือ $(x,z)\in g\circ f$ เมื่อและต่อเมื่อ มี $y\in B$ ซึ่ง $(x,y)\in f$ และ $(y,z)\in g$. สิ่งที่น่าสนใจคือ $g\circ f$ ไม่ได้เป็นเพียงความสัมพันธ์ทวิภาคธรรมดา แต่เป็น*ฟังก์ชัน*จาก A ไป C ดังสรุปเป็นทฤษฎีบทดังนี้:

ทฤษฎีบท 3: ถ้าให้ A, B, และ C เป็นเซตใดๆ และให้ $f:A\rightarrow B$ และ $g:B\rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันใดๆ, จะได้ว่าความสัมพันธ์ประกอบ $g\circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C โดยที่ $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ สำหรับ x ใดๆใน A.

บทพิสูจน์: ให้ x เป็นสมาชิกใดๆใน A. เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน, จะมี y เพียงตัวเดียวในเซต B ซึ่ง $(x,y) \in f$; นั่นคือ $y = f(x)$. และเนื่องจาก g เป็นฟังก์ชัน จะมี z เพียงตัวเดียวในเซต C ซึ่ง $(y,z) \in g$; นั่นคือ $z = g(y)$. ดังนั้นเราได้ $(x,z)\in g\circ f$. เนื่องจาก $z = g(y) = g(f(x))$ แสดงว่ามี z ใน C เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ $(x,z) \in g\circ f$ โดย $z = g(f(x))$. ดังนั้นเราได้แสดงแล้วว่า $g\circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C โดยที่ $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ สำหรับ x ใดๆใน A.

❑

เนื่องจากความสัมพันธ์ประกอบ $g\circ f$ ที่สร้างจากฟังก์ชัน f และ g เป็นฟังก์ชัน ดังนั้นเราจะเรียก $g\circ f$ เป็น**ฟังก์ชันประกอบ** (composite function) ของ f และ g.

หากพิจารณาโดยละเอียดจะพบว่า เมื่อกำหนด $f:A\rightarrow B$ และ $g:C\rightarrow D$ โดย $B \neq C$, เราจะได้ฟังก์ชัน $h:A\rightarrow D$ ซึ่ง $h(x) = g(f(x))$ เป็นฟังก์ชันที่มีนิยามแจ่มชัดถ้าเรนจ์ของ f เป็นสับเซ็ตของโดเมนของ g (เพราะเหตุใด?). ด้วยเหตุนี้ ตำราหลายเล่มจึงใช้ฟังก์ชัน $h(x) = g(f(x))$ ที่สร้างจาก f และ g ดังกล่าวเป็นนิยามของฟังก์ชันประกอบ $g\circ f$ โดยมีเงื่อนไขว่า $g\circ f$ จะสร้างขึ้นได้เมื่อและต่อเมื่อ range(f) $\subseteq$ dom(g). นิยามของ $g\circ f$ เช่นนี้ทำให้การสร้างฟังก์ชันประกอบมีความยืดหยุ่นมากขึ้นและไม่ขัดแย้งกับการนิยามฟังก์ชันประกอบจากความสัมพันธ์ประกอบดังในทฤษฎีบท 3 แต่อย่างใด ดังนั้นเราจะอนุโลมใช้เป็นนิยามอย่างเป็นทางการของฟังก์ชันประกอบในตำราเล่มนี้เช่นกัน ดังนี้:

บทนิยาม 8: ให้ A, B, C, และ D เป็นเซตใดๆ และให้ $f:A\rightarrow B$ และ $g:C\rightarrow D$ เป็นฟังก์ชันใดๆ โดยที่ range(f) $\subseteq$ dom(g). เราจะเรียกฟังก์ชัน $g\circ f: A\rightarrow D$ ซึ่ง $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก $x\in A$ ว่าเป็น **ฟังก์ชันประกอบของ f และ g** (composite function of f and g).

ให้สังเกตว่า ถ้า*โคโดเมนของ f* เป็นเซตเดียวกับ*โดเมนของ g* (นั่นคือ B = C ในบทนิยาม 8), เราจะสร้าง $g \circ f$ ได้อย่างแน่นอน (เพราะเหตุใด?).

ตัวอย่าง 4: ให้ $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x+2$. จงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$.

<u>*วิธีทำ*</u> เนื่องจาก f และ g มีโดเมนและโคโดเมนเป็นเซตเดียวกันหมด ดังนั้นเราย่อมหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้อย่างแน่นอน. จากบทนิยาม 8 เราได้ว่า $g \circ f$ และ $f \circ g$ ล้วนเป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ โดยที่

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+2$$

และ

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2 = x^2+4x+4.$$

ดังนั้นในกรณีนี้เราอาจหาค่า $(g \circ f)(3)$ ได้สองวิธี. วิธีแรกคือจากนิยามของ $g \circ f$ เราได้ $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3^2) = g(9) = 9+2 = 11$. และวิธีที่สองจากสูตรที่หาได้ข้างบนคือ $(g \circ f)(3) = 3^2+2 = 11$.

❑

ให้สังเกตจากตัวอย่าง 4 ด้วยว่า โดยทั่วไปแล้ว $g \circ f$ กับ $f \circ g$ ไม่ใช่ฟังก์ชันเดียวกัน.

อย่างที่เราทราบแล้วว่า ถ้า $f:A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันใดๆที่สมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง, f จะมีฟังก์ชันผกผัน $f^{-1}:B \longrightarrow A$. เมื่อตรวจสอบโดเมนและโคโดเมนของ f และ f^{-1} แล้ว เราพบว่าฟังก์ชันประกอบ $f^{-1} \circ f$ และ $f \circ f^{-1}$ จะหาได้เสมอ โดยที่ $f^{-1} \circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป A และ $f \circ f^{-1}$ เป็นฟังก์ชันจาก B ไป B. ถ้า x เป็นสมาชิกใดๆใน A และ $f(x) = y \in B$, เราจะได้ $f^{-1}(y) = x$ และ

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

และ

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

ดังนั้น เราได้พิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้เรียบร้อยแล้ว (เชื่อหรือไม่?)

ทฤษฎีบท 4: ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ. ถ้า $f:A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันผกผันได้, เราได้

$$f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_A \quad \text{และ} \quad f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_B$$

ฟังก์ชันพื้นและฟังก์ชันเพดาน (The Floor and the Ceiling Functions)

ในบรรดาฟังก์ชันจาก R ไป Z มีฟังก์ชันอยู่สองฟังก์ชันที่ใช้มากในคณิตศาสตร์เต็มหน่วยและในวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์. ฟังก์ชันทั้งสองนี้เรียกว่า**ฟังก์ชันพื้น** (floor function) และ**ฟังก์ชันเพดาน** (ceiling function) ซึ่งอาจมองได้ว่าเป็นการแปลงจากจำนวนจริงเป็นจำนวนเต็มที่ใกล้เคียงที่สุดทางด้านล่างและด้านบนตามลำดับ ดังบทนิยามต่อไปนี้.

บทนิยาม 9: **ฟังก์ชันพื้น** (floor function) เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{Z}$ โดยค่าของฟังก์ชันที่ x ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lfloor x \rfloor$ คือค่าจำนวนเต็มใหญ่ที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x. **ฟังก์ชันเพดาน** (ceiling function) เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{Z}$ โดยค่าของฟังก์ชันที่ x ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lceil x \rceil$ คือค่าจำนวนเต็มเล็กที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x.

เราอาจใช้ความจริงที่ว่าจำนวนจริงทุกตัวจะอยู่ระหว่างจำนวนเต็มที่อยู่ติดกันสองตัวมาช่วยทำให้นิยามของฟังก์ชันทั้งสองเป็นรูปธรรมมากขึ้น. ความจริงต่อไปนี้เป็นผลโดยตรงจากบทนิยาม 9:

$\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z}$ เมื่อและต่อเมื่อ $n \le x < n+1$

$\lceil x \rceil = n \in \mathbb{Z}$ เมื่อและต่อเมื่อ $n-1 < x \le n$

ตัวอย่างเช่น -3.1 อยู่ระหว่าง -4 กับ -3 ดังนั้น $\lfloor -3.1 \rfloor$ = -4 และ $\lceil -3.1 \rceil$ = -3. ตัวอย่างของค่าฟังก์ชันพื้นและฟังก์ชันเพดานที่ค่า x ต่างๆ ได้แก่

$$\left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor = 0, \quad \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor = -1, \quad \lfloor 5.14 \rfloor = 5, \quad \lfloor 4 \rfloor = 4, \quad \lfloor -5 \rfloor = -5$$

$$\left\lceil \frac{1}{4} \right\rceil = 1, \quad \left\lceil -\frac{1}{4} \right\rceil = 0, \quad \lceil 5.14 \rceil = 6, \quad \lceil 4 \rceil = 4, \quad \lceil -5 \rceil = -5$$

มีความจริงที่น่าสนใจและมีประโยชน์เกี่ยวกับฟังก์ชันพื้นและฟังก์ชันเพดานหลายประการ. ผู้อ่านควรสนใจที่จะพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้ให้ประจักษ์แก่ตนเองมากกว่าที่จะจดจำไปใช้แบบนกแก้วนกขุนทอง.

ทฤษฎีบท 5: ข้อความต่อไปนี้เป็นความจริงสำหรับจำนวนจริง x และจำนวนเต็ม n ใดๆ

1. $\lfloor x \rfloor = n$ เมื่อและต่อเมื่อ $x-1 < n \le x$
2. $\lceil x \rceil = n$ เมื่อและต่อเมื่อ $x \le n < x+1$
3. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
4. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
5. $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
6. $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$
7. $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$

ฟังก์ชันของหลายตัวแปร (Function of several variables)

เนื่องจากผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตหลายเซตก็เป็นเซตๆหนึ่ง จึงไม่ใช่เรื่องแปลกอะไรที่เราจะมีฟังก์ชันที่โดเมนของมันเป็นผลคูณคาร์ทีเซียน. ถ้า $n \ge 2$ และ $A_1, A_2, ..., A_n$, และ B เป็นเซตใดๆ, เราจะเรียกฟังก์ชัน $f:A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \to B$ ว่าเป็น**ฟังก์ชันของ n ตัวแปร** (function of n variables). เพื่อความสะดวกเราจะอนุโลมเขียนแทน *ค่าของฟังก์ชัน f ที่ $(x_1,x_2,...,x_n)$* ด้วยสัญลักษณ์ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ แทนที่จะเป็น $f((x_1,x_2,...,x_n))$. จากนิยามของฟังก์ชันเราจะได้ว่า สำหรับ n-ทูเปิล $(x_1,x_2,...,x_n)$ แต่ละตัวในโดเมน $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ จะมีค่า $f(x_1,x_2,...,x_n)$ เสมอและมีเพียงค่าเดียว. นี่คือการกล่าวว่า

$$\forall x_1 \in A_1 \; \forall x_2 \in A_2 \; \forall x_n \in A_n \; \exists! y \in B \; [y = f(x_1,x_2,...,x_n)]$$

นั่นเอง. เมื่อ $f(a_1,a_2,...,a_n) = b$ เรามักจะเรียก $a_1, a_2, ..., a_n$ ว่าเป็นอาร์กิวเมนต์ n ตัวของฟังก์ชัน f และ b เป็นค่าฟังก์ชัน f ของอาร์กิวเมนต์ทั้ง n ตัวนั้น. สำหรับฟังก์ชันที่มี $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ เป็นโดเมน, เราจะเรียก A_i ว่าเป็น**เอกภพของตัวแปรที่ i** ของฟังก์ชัน.

เราจะเรียกฟังก์ชัน $f:A \longrightarrow B$ ใดๆ โดยที่ A ไม่ใช่ผลคูณคาร์ทีเซียนว่าเป็น **ฟังก์ชันของตัวแปรเดียว** (function of one variable). ฟังก์ชันต่างๆที่เรากล่าวถึงทั้งหมดก่อนหัวข้อย่อยนี้ล้วนเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียวทั้งสิ้น.

ตัวอย่างของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้แก่ $g:\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})\longrightarrow\mathbb{R}$ ซึ่ง $g(x,y) = x/y$ เป็น*ฟังก์ชันของสองตัวแปร*. เราได้ $g(-1,2) = -1/2 = -0.5$, $g(1,-2) = 1/-2 = -0.5$, และ $g(7,2) = 3.5$ เป็นต้น. เรากล่าวว่าเมื่ออาร์กิวเมนต์ของฟังก์ชันคือ 7 และ 2, ค่าของฟังก์ชันคือ $g(7,2)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $7/2 = 3.5$.

ฟังก์ชันของหลายตัวแปรกับความสัมพันธ์ n-ภาค

เนื่องจากมีสมสัณฐานตามธรรมชาติระหว่างเซต $((A_1\times A_2\times\ldots\times A_n)\times B)$ กับเซต $(A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\times B)$, เรากล่าวได้ว่าความสัมพันธ์ทวิภาค $R \subseteq ((A_1\times A_2\times\ldots\times A_n)\times B)$ เป็นสมสัณฐานตามธรรมชาติกับความสัมพันธ์ (n+1)-ภาค $S \subseteq (A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\times B)$ ซึ่งนิยามจาก R ดังนี้

สำหรับ $x_1, x_2, \ldots, x_n, b$ ใดๆ, $(x_1,x_2,\ldots,x_n,b) \in S$ เมื่อและต่อเมื่อ $((x_1,x_2,\ldots,x_n),b) \in R$.

ในบริบทส่วนใหญ่ เราจึงอาจมองได้ว่าความสัมพันธ์ทวิภาค R และความสัมพันธ์ (n+1)-ภาค S ดังกล่าวเป็นสิ่งเดียวกันและใช้แทนกันได้.

ย้อนกลับมาดูนิยามของฟังก์ชันของหลายตัวแปรในหัวข้อย่อยที่แล้ว. ถ้าเราเคร่งครัดต่อบทนิยาม 1 ที่นิยามฟังก์ชันจากความสัมพันธ์ทวิภาค, ฟังก์ชันของ n ตัวแปร $f:A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\longrightarrow B$ ก็คือความสัมพันธ์ทวิภาคจากเซต $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ ไปเซต B ที่มีสมบัติพิเศษคือ

$$\forall(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\ \exists!b\in B\ [((x_1,x_2,\ldots,x_n),b) \in f] \qquad \text{--①}$$

ด้วยสมสัณฐานตามธรรมชาติระหว่างความสัมพันธ์ทวิภาคและความสัมพันธ์ (n+1)-ภาคดังที่กล่าวข้างต้น, เราอาจมองฟังก์ชัน f ของ n ตัวแปรดังกล่าวเป็น *ความสัมพันธ์ (n+1)-ภาคระหว่างเซต $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$* ที่มีสมบัติพิเศษคือ

$$\forall x_1\in A_1\ \forall x_2\in A_2\ \forall x_n\in A_n\ \exists!b\in B\ [(x_1,x_2,\ldots,x_n,b) \in f] \qquad \text{--②}$$

จะเห็นว่าข้อความ ① และ ② สมมูลกันในลักษณะที่เกือบจะเรียกได้ว่าเป็นข้อความเดียวกัน.

โดยทั่วไปแล้วการมองฟังก์ชันของ n ตัวแปรเป็นความสัมพันธ์ (n+1)-ภาค จะสะดวกและเป็นธรรมชาติกว่ามองเป็นความสัมพันธ์ทวิภาค ดังนั้นจึงเป็นที่นิยมมากกว่า (ตำราเล่มนี้ก็ไม่ใช่ข้อยกเว้น).

ในทางกลับกัน ถ้าความสัมพันธ์ n-ภาค $F \subseteq A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ ใดมีสมบัติที่ว่า

$$\forall x_1\in A_1\ \forall x_2\in A_2\ \forall x_{n-1}\in A_{n-1}\ \exists!y\in A_n\ [(x_1,x_2,\ldots,x_n,y) \in F] \qquad \text{--③}$$

เราจะเรียก F ว่าเป็นฟังก์ชันของ n-1 ตัวแปรจาก $A_1\times A_2\times\ldots\times A_{n-1}$ ไป A_n โดย $F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = y$ เมื่อ $(x_1,x_2,\ldots,x_n,y) \in F$.

ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันของสองตัวแปร $g:\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})\longrightarrow\mathbb{R}$ ซึ่ง $g(x,y) = x/y$ ในตัวอย่างข้างบนคือความสัมพันธ์ไตรภาค $g = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})\times\mathbb{R} : z = x/y\}$. และในทางกลับกัน ความสัมพันธ์จตุภาค $f = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x^2-y^2-z^2-u^3 = 0\}$ คือฟังก์ชันของสามตัวแปร $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ซึ่ง $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2 - y^2 - z^2}$ เป็นต้น.

อนึ่ง พึงตระหนักว่าฟังก์ชันของ n ตัวแปรคือความสัมพันธ์ (n+1)-ภาคเสมอ, แต่ความสัมพันธ์ n-ภาคอาจไม่ใช่ฟังก์ชันของ n-1 ตัวแปรก็ได้ ถ้าหากไม่มีสมบัติดังในข้อความ ③ ข้างบน. ตัวอย่าง

เช่นความสัมพันธ์ไตรภาค h = $\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R} : z = x/y\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรเพราะเมื่อตัวแปร y เท่ากับ 0, จะหาค่า h(x,0) ไม่ได้. ส่วนความสัมพันธ์ไตรภาค i = $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} : z^2 = x^2+y^2\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรเพราะเมื่อตัวแปร x และ y ไม่เท่ากับ 0, จะมีค่า z มากกว่าหนึ่งค่าที่ทำให้ $(x,y,z) \in i$.

การดำเนินการ n-ภาค (N-ary operation)

ถ้าให้ A เป็นเซตใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ, เราจะเรียกฟังก์ชัน $f:A^n \longrightarrow A$ ใดๆว่าเป็น**การดำเนินการ n-ภาคบนเซต A** (n-ary operation on A). (อย่าลืมว่า A^n คือผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A จำนวน n เซต). เมื่อ n = 1, 2, และ 3, เราจะเรียก f ว่าเป็น**การดำเนินการเอกภาค** (unary operation), **การดำเนินการทวิภาค** (binary operation), และ**การดำเนินการไตรภาค** (ternary operation) ตามลำดับ.

การยกกำลังสองของจำนวนจริงใดๆเป็นตัวอย่างของการดำเนินการเอกภาคบน $\mathbb{R}$ เพราะเราอาจมองการยกกำลังสองของจำนวนจริงเป็นฟังก์ชัน $sqr:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ซึ่ง $sqr(x) = x\cdot x$.

ถ้าให้ $\mathbb{U}$ เป็นเซตเอกภพ, *ยูเนียนของเซตสองเซต* ที่เรานิยามในหัวข้อ 2.1 เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ ซึ่งก็คือฟังก์ชัน $union:\mathcal{P}(\mathbb{U})\times\mathcal{P}(\mathbb{U})\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbb{U})$ โดย $union(A,B) = \{x : x\in A \vee x\in B\}$ และเพื่อความสะดวกเราเขียน $A\cup B$ แทน union(A,B).

ฟังก์ชัน $min:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ ซึ่ง min(x,y,z) คือค่าน้อยที่สุดใน x, y, และ z เป็นการดำเนินการไตรภาคบนเซตจำนวนจริง. ตัวอย่างเช่น min(3,5,-1) = -1.

สำหรับฟังก์ชันที่เป็นการดำเนินการเอกภาคและการดำเนินการทวิภาค เรามักกำหนด**โอเปอเรเตอร์** (operator) เพื่อเป็นสัญลักษณ์แทนการดำเนินการนั้นๆ เพื่อความกระทัดรัด. ตัวอย่างเช่นเรามีโอเปอเรเตอร์ $\vee$ แทนการดำเนินการทวิภาค “และ” ระหว่างประพจน์ (เช่นเราเขียนว่า $p\vee q$) และมีโอเปอเรเตอร์ $\cup$ แทนการดำเนินการทวิภาค “ยูเนียน” ระหว่างเซต (เช่นเราเขียนว่า $A\cup B$) เป็นต้น. เราอาจกำหนดโอเปอเรเตอร์สำหรับการดำเนินการเอกภาคได้หลายวิธี เช่นเราเขียน x^2 แทนการยกกำลังสองของจำนวนจริง x และเขียน $\sim p$ แทนนิเสธของประพจน์ p เป็นต้น. เราจะเรียกโอเปอเรเตอร์สำหรับการดำเนินการเอกภาคว่า **โอเปอเรเตอร์เอกภาค** (unary operator) และเรียกโอเปอเรเตอร์สำหรับการดำเนินการทวิภาคว่า **โอเปอเรเตอร์ทวิภาค** (binary operator). ตัวอย่างเช่น โอเปอเรเตอร์ $\sim$ สำหรับประพจน์เป็นโอเปอเรเตอร์เอกภาค ส่วนโอเปอเรเตอร์ $\cup$, $\cap$, และ $\oplus$ สำหรับเซตเป็นโอเปอเรเตอร์ทวิภาค. เรามักไม่นิยมกำหนดโอเปอเรเตอร์สำหรับการดำเนินการ n-ภาค เมื่อ n มากกว่าสอง เพราะการเขียนในรูปฟังก์ชันจะสะดวกกว่า.

สมบัติของการดำเนินการทวิภาค (Properties of Binary Operations)

การดำเนินการทวิภาคบางอย่างเช่นการบวกจำนวนจริงมีสมบัติที่ว่า

$x+y = y+x$ ทุก $x, y \in \mathbb{R}$.

เรากล่าวว่าการบวกจำนวนจริงมี**สมบัติการสลับที่** (commutative property). เนื่องจาก $x-y \neq y-x$ ยกเว้นในกรณีที่ $x = y$, ดังนั้นการลบจำนวนจริงไม่มีสมบัติการสลับที่. ถ้าเราเขียนการบวกจำนวนจริงในรูปฟังก์ชันของสองตัวแปร $add(x,y) = x+y$, สมบัติการสลับที่สำหรับการบวกจำนวนจริงก็คือ

$$add(x,y) = add(y,x) \text{ ทุก } x, y \in \mathbb{R}.$$

ดังนั้นเราได้นิยามอย่างเป็นทางการของสมบัติการสลับที่ของการดำเนินการทวิภาคใดๆ ดังนี้.

บทนิยาม 10: ให้ A เป็นเซตใดๆ และ $f:A\times A\rightarrow A$ เป็นการดำเนินการทวิภาคใดๆบนเซต A. เราจะกล่าวว่าการดำเนินการ f มี**สมบัติการสลับที่** (commutative property) ถ้า

$$f(x,y) = f(y,x) \text{ สำหรับทุก } x, y \in A.$$

นอกจากการบวกจำนวนจริงจะมีสมบัติการสลับที่แล้ว ยังมีสมบัติอีกอย่างหนึ่งคือ

$$(x+y)+z = x+(y+z) \text{ ทุก } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

เราเรียกสมบัติเช่นนี้ว่า**สมบัติการเปลี่ยนหมู่** (associative property). ถ้าเราเขียนการบวกจำนวนจริงในรูปฟังก์ชันสองตัวแปร $add(x,y)$, สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการบวกจำนวนจริงก็คือ

$$add(add(x,y),z) = add(x,add(y,z)) \text{ ทุก } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

ดังนั้น นิยามอย่างเป็นทางการของสมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการดำเนินการทวิภาคใดๆคือ

บทนิยาม 11: ให้ A เป็นเซตใดๆ และ $f:A\times A\rightarrow A$ เป็นการดำเนินการทวิภาคใดๆบนเซต A. เราจะกล่าวว่าการดำเนินการ f มี**สมบัติการเปลี่ยนหมู่** (associative property) ถ้า

$$f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z)) \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in A.$$

ตัวอย่าง 5: จงพิจารณาว่าการดำเนินการทวิภาคต่อไปนี้มีสมบัติการสลับที่และสมบัติการเปลี่ยนหมู่หรือไม่:

(ก) การยูเนียนกันของเซตสองเซต

(ข) $g:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ โดย $g(x,y) = x|y|$

(ค) $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ โดย $f(x,y) = \lceil x+y \rceil$

<u>*วิธีทำ*</u>

(ก) จากตาราง 1 หัวข้อ 2.1 เราทราบว่า $A\cup B = B\cup A$ และ $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ เป็นเอกลักษณ์เซต ดังนั้นการยูเนียนกันของเซตสองเซตมีทั้งสมบัติการสลับที่และสมบัติการเปลี่ยนหมู่.

(ข) เนื่องจาก $g(1,-2) = 1|-2| = 2$ แต่ $g(-2,1) = -2|1| = -2$, แสดงว่ามี x, y บางคู่ที่ทำให้ $g(x,y) \neq g(y,x)$. ดังนั้น g ไม่มีสมบัติการสลับที่. อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณา $g(g(x,y),z)$ และ $g(x,g(y,z))$ เราได้

$$g(g(x,y),z) = g(x,y)|z| = x|y||z| \quad \text{และ}$$

$$g(x,g(y,z)) = x|g(y,z)| = x|y|z|| = x|y||z| = g(g(x,y),z)$$

ดังนั้นการดำเนินการทวิภาค g มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่.

(ค) เนื่องจาก $\lceil x+y \rceil = \lceil y+x \rceil$ ดังนั้น f มีสมบัติการสลับที่. แต่เราพบว่ามีจำนวนจริง x, y, z บางตัวที่ทำให้ $\lceil \lceil x+y \rceil + z \rceil \neq \lceil x + \lceil y+z \rceil \rceil$ เช่น

$$\lceil \lceil 1.1+2.6 \rceil + 3.5 \rceil = \lceil \lceil 3.7 \rceil + 3.5 \rceil = \lceil 4+3.5 \rceil = \lceil 7.5 \rceil = 8$$

$$\lceil 1.1 + \lceil 2.6+3.5 \rceil \rceil = \lceil 1.1 + \lceil 6.1 \rceil \rceil = \lceil 1.1+7 \rceil = \lceil 8.1 \rceil = 9$$

ดังนั้น f ไม่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่.

❏

2.4 สมบัติปิดของเซต (Closure Property of a Set)

เมื่อเราพิจารณาการบวกจำนวนจริงในฐานะที่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$ เราอาจสนใจว่า สำหรับจำนวนเต็ม m และ n ใดๆ, m+n เป็นจำนวนเต็มเสมอหรือไม่. เราทราบว่าคำตอบคือใช่. นี่คือสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของเซตจำนวนเต็มที่เรียกว่า *สมบัติปิดภายใต้การบวก (closed under addition)*. หัวข้อนี้จะกล่าวถึงนิยามและความหมายของสมบัติปิดของเซตภายใต้การดำเนินการ n-ภาคหรือความสัมพันธ์ n-ภาคใดๆ ซึ่งเป็นสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของเซต.

สมบัติปิดของเซตภายใต้การดำเนินการเอกภาค

เราจะเริ่มต้นด้วยบทนิยามของ**สมบัติปิดของเซตภายใต้การดำเนินการเอกภาค** (closure property of a set under a unary operation) ดังนี้.

บทนิยาม 1: ให้ D เป็นเซตใดๆ และฟังก์ชัน $f:D\longrightarrow D$ คือการดำเนินการเอกภาคบนเซต D. ถ้า $B \subseteq D$ มีสมบัติที่ว่า

สำหรับทุก $x \in B$, $f(x) \in B$,

เราจะกล่าวว่าเซต B **มีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการเอกภาค f** (closed under unary operation f).

ให้สังเกตว่า เซต D ในบทนิยามข้างบนย่อมมีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ f อยู่แล้ว เพราะ f เป็นฟังก์ชันจาก D ไป D ดังนั้น $f(x) \in D$ ทุก $x \in D$. ด้วยเหตุนี้เราจึงสนใจเฉพาะสมบัติปิดของสับเซตของ D.

ตัวอย่าง 1: การดำเนินการ "เปลี่ยนเครื่องหมาย" บน $\mathbb{R}$ คือฟังก์ชัน $s(x) = -x$. จงพิจารณาว่าเซตจำนวนนับ $\mathbb{N}$ และเซตจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ มีสมบัติปิดภายใต้การเปลี่ยนเครื่องหมายหรือไม่.

<u>*วิธีทำ*</u> $\mathbb{N}$ ไม่มีสมบัติปิดภายใต้การเปลี่ยนเครื่องหมายเพราะสำหรับจำนวนนับ $x \neq 0$ ใดๆ, $-x$ ไม่ใช่จำนวนนับ. แต่ $\mathbb{Z}$ มีสมบัติปิดภายใต้การเปลี่ยนเครื่องหมายเพราะ $-x$ เป็นจำนวนเต็มเสมอเมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม.

❏

สมบัติปิดของเซตภายใต้การดำเนินการ n-ภาค

เราสามารถขยายบทนิยาม 1 ไปสู่สมบัติปิดของเซตภายใต้การดำเนินการ n-ภาคใดๆ เมื่อ $n \geq 1$ ได้ดังนี้.

บทนิยาม 2: ให้ D เป็นเซตใดๆ และให้ฟังก์ชัน $f:D^n\longrightarrow D$ โดย $n \geq 1$ คือการดำเนินการ n-ภาคใดๆบนเซต D. ถ้า $B \subseteq D$ มีสมบัติที่ว่า

สำหรับทุก $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in B$,

เราจะกล่าวว่าเซต B **มีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ n–ภาค f** (closed under n–ary operation f).

ให้สังเกตว่า ในบทนิยาม 2 เราสนใจสมบัติปิดของเซตเฉพาะเซตที่เป็นสับเซตของ D เพราะโดยนิยามของฟังก์ชัน ตัวเซต D เองมีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ n-ภาค f อยู่แล้ว (ทำไม?).

ตัวอย่าง 2: การลบกันของจำนวนจริงสองตัวเป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$ ซึ่งอาจเขียนในรูปฟังก์ชันของสองตัวแปรได้ว่า f(x,y) = x–y. จงพิจารณาว่า $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$, และ $\mathbb{Z}$ มีสมบัติปิดภายใต้การลบหรือไม่.
วิธีทำ เนื่องจาก 2–3 = –1 ไม่ใช่จำนวนเต็มบวกทั้งๆที่ 2 และ 3 เป็นจำนวนเต็มบวก, เราสรุปได้ว่า $\mathbb{Z}^+$ ไม่มีสมบัติปิดภายใต้การลบ. ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก (–1)–(–2) = 1 ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ ทั้งๆที่ –1 และ –2 เป็นจำนวนเต็มลบ, ดังนั้น $\mathbb{Z}^-$ ไม่มีสมบัติปิดภายใต้การลบเช่นกัน.

เนื่องจาก x–y เป็นจำนวนเต็มเสมอเมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $\mathbb{Z}$ มีสมบัติปิดภายใต้การลบ.
❑

สมบัติปิดของเซตภายใต้ความสัมพันธ์ n-ภาค

ที่ผ่านมาเรานิยามการดำเนินการเอกภาค f บนเซต D เป็นฟังก์ชันจาก D ไป D. ดังนั้นเราอาจมองการดำเนินการ f เหมือนเป็นกล่องดำที่เมื่อส่งค่า x แต่ละค่าใน D เป็นอินพุตแล้ว กล่องดำนี้จะผลิตค่า f(x) เป็นเอาท์พุตได้เสมอและได้เพียงค่าเดียวสำหรับ x แต่ละตัว.

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ทวิภาค R ใดๆบนเซต D, เราอาจมอง R เหมือนเป็นกล่องดำที่รับอินพุตและผลิตเอาท์พุตได้เช่นกัน นั่นคือเมื่อใดก็ตามที่ (a,b) ∈ R, เราอาจมองได้ว่าเมื่อส่ง a เป็นอินพุตแล้ว, กล่องดำ R จะส่ง b ออกมาเป็นเอาท์พุต. แต่กล่องดำของความสัมพันธ์จะมีคุณสมบัติแตกต่างจากกล่องดำของฟังก์ชันอยู่สองประการคือ

(1) อาจเป็นไปได้ว่าเมื่อส่ง x บางตัวใน D เป็นอินพุตแล้ว กล่องดำ R จะไม่สามารถผลิตเอาท์พุตได้ และ

(2) อาจเป็นไปได้ว่าเมื่อส่ง x บางตัวใน D เป็นอินพุตแล้ว กล่องดำ R จะผลิตเอาท์พุตได้มากกว่าหนึ่งค่า.

ผู้อ่านคงเดาได้ว่า เหตุการณ์ข้อ (1) เกิดขึ้นในกรณีที่ x ตัวนั้นไม่สัมพันธ์แบบ R กับสมาชิกใดๆใน D เลย ส่วนเหตุการณ์ข้อ (2) เกิดขึ้นในกรณีที่ x ตัวนั้นสัมพันธ์แบบ R กับสมาชิกใน D มากกว่าหนึ่งตัว.

เมื่อมองความสัมพันธ์ทวิภาค R บนเซต D ใดๆในลักษณะเช่นนี้, เราก็อาจมองความสัมพันธ์ทวิภาคบนเซตคล้ายเป็นการดำเนินการเอกภาคแบบพิเศษแบบหนึ่งที่เมื่อส่งค่า x ในโดเมนเป็นอินพุตแล้วอาจไม่ผลิตเอาท์พุตเลยหรืออาจผลิตเอาท์พุตหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัวก็ได้ ทั้งนี้แล้วแต่ค่า x ที่ส่งมา. ด้วยมุมมองเช่นนี้ เราสามารถขยายมโนทัศน์เรื่อง*สมบัติปิดของเซตภายใต้การดำเนินการเอกภาค* มาใช้กับความสัมพันธ์ทวิภาคได้ ดังบทนิยามต่อไปนี้.

บทนิยาม 3: ให้ D เป็นเซตใดๆ และ R ⊆ D×D เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคใดๆบนเซต D. ถ้า B ⊆ D มีสมบัติที่ว่า

สำหรับทุก $x \in B$, ถ้า $y \in D$ และ $(x,y) \in R$ แล้ว, จะได้ $y \in B$.
เราจะกล่าวว่าเซต B **มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ทวิภาค R** (closed under binary relation R).

กล่าวอย่างง่ายคือ เซต B จะมีสมบัติปิดภายใต้ R เมื่อและต่อเมื่อสมาชิกแต่ละตัวใน B ไม่มีความสัมพันธ์แบบ R กับสมาชิกใดที่อยู่นอกเซต B เลย.

เช่นเดียวกับเรื่องสมบัติปิดของเซตภายใต้การดำเนินการ, เซต D ในบทนิยาม 3 ย่อมมีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ $R \subseteq D \times D$ ใดๆ อยู่แล้วโดยนิยามของความสัมพันธ์ทวิภาค (ทำไม?) ดังนั้นเราจึงสนใจเฉพาะสมบัติปิดของสับเซตของ D เท่านั้น.

ตัวอย่าง 3: ให้ D = {1,2,3,4,5} และ R = {(1,1),(1,3),(2,3),(3,4),(4,4),(4,5)} $\subseteq D \times D$. และให้ A = {1,2,3} และ B = {3,4,5} เป็นสับเซตของ D. จงพิจารณาว่าเซต D, A, และ B มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ R หรือไม่.

<u>*วิธีทำ*</u> โดยนิยามของความสัมพันธ์ เซต D ย่อมมีสมบัติปิดภายใต้ทุกความสัมพันธ์ทวิภาคบน D อยู่แล้ว ดังนั้น D มีสมบัติปิดภายใต้ R.

พิจารณาเซต A. เนื่องจาก $3 \in A$ และ $(3,4) \in R$ แต่ $4 \notin A$ ดังนั้น A ไม่มีสมบัติปิดภายใต้ R.

พิจารณาสมาชิกแต่ละตัวใน B. 3 สัมพันธ์แบบ R กับ 4 และ $4 \in B$. 4 สัมพันธ์แบบ R กับ 4 และ 5, และทั้ง 4 และ 5 อยู่ใน B. ส่วน 5 ไม่สัมพันธ์แบบ R กับตัวใดเลย ดังนั้นจึงไม่มีอะไรต้องพิจารณา. จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวใน B จะสัมพันธ์แบบ R กับสมาชิกภายใน B เท่านั้น ดังนั้น B มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ R.

❑

ตัวอย่าง 4:.ให้ R เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคบน $\mathbb{R}$ โดยที่ x R y เมื่อและต่อเมื่อ $x^2 = y^2$. จงพิจารณาว่า $\mathbb{Z}$ และ $\mathbb{N}$ มีสมบัติปิดภายใต้ R หรือไม่.

<u>*วิธีทำ*</u> เราเขียนนิยามของ R ได้อีกอย่างหนึ่งว่า x R y เมื่อและต่อเมื่อ y = x หรือ −x. ดังนั้นเมื่อ x เป็นจำนวนเต็มและ x R y, y จะต้องเท่ากับ x หรือ −x ซึ่งเป็นจำนวนเต็มเช่นกัน. ดังนั้น $\mathbb{Z}$ มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ R.

$\mathbb{N}$ ไม่มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ R เพราะจำนวนนับ x แต่ละตัวจะสัมพันธ์แบบ R กับ −x ซึ่งไม่ใช่จำนวนนับ.

❑

เราจะขยายมโนทัศน์ของสมบัติปิดของเซตภายใต้ความสัมพันธ์ทวิภาคไปสู่สมบัติปิดของเซตภายใต้ความสัมพันธ์ n-ภาคใดๆ เมื่อ $n \geq 2$ ได้ดังนี้.

บทนิยาม 4: ให้ D เป็นเซตใดๆ และ $R \subseteq D^n$ เป็นความสัมพันธ์ n-ภาคใดๆบนเซต D โดย $n \geq 2$. ถ้า $B \subseteq D$ มีสมบัติที่ว่า

สำหรับทุก $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in B$, ถ้า $y \in D$ และ $(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y) \in R$ แล้ว, จะได้ $y \in B$.
เราจะกล่าวว่าเซต B **มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ n-ภาค R** (closed under n-ary relation R).

สังเกตว่าเซต D ในบทนิยามข้างบนย่อมมีสมบัติปิดภายใต้ R เสมอ เพราะความจริงที่ว่า $(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y) \in R$ ทำให้สรุปได้ว่า $y \in D$ อยู่แล้ว เพราะ R เป็นความสัมพันธ์บน D โดยนิยาม.

ตัวอย่าง 5: ให้ R เป็นความสัมพันธ์ไตรภาคบน $\mathbb{R}$ โดยที่ $(x,y,z) \in \mathbb{R}$ เมื่อและต่อเมื่อ $x^2-y^2-z^2 = 0$. จงพิจารณาว่า $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, และ $\mathbb{R}$ มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ R หรือไม่.

<u>*วิธีทำ*</u> เนื่องจาก 3 และ 1 เป็นทั้งจำนวนนับและเป็นจำนวนเต็ม และ $(3,1,\sqrt{8}) \in R$ แต่ $\sqrt{8}$ ไม่ใช่จำนวนนับและไม่ใช่จำนวนเต็ม ดังนั้นทั้ง $\mathbb{N}$ และ $\mathbb{Z}$ ไม่มีสมบัติปิดภายใต้ R.

$\mathbb{R}$ มีสมบัติปิดภายใต้ R เพราะ R เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{R}$. โปรดสังเกตว่าการที่ไม่มีจำนวนจริง z ใดเลยที่ทำให้ $(1,3,z) \in R$ ไม่ได้ขัดแย้งกับสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ R ของเซต $\mathbb{R}$ แต่ประการใด. (ทำไม?)

❑

สมบัติปิดของเซตภายใต้ความสัมพันธ์เอกภาค

เราได้ทราบในหัวข้อ 2.2 แล้วว่าความสัมพันธ์เอกภาคบนเซตใดๆ ก็คือสับเซตของเซตนั้นนั่นเอง. เพื่อความสมบูรณ์ของมโนทัศน์เรื่องสมบัติปิดของเซต เราควรจะให้นิยามของสมบัติปิดของเซตภายใต้ความสัมพันธ์เอกภาคด้วย ซึ่งเป็นได้มาโดยตรงจากบทนิยาม 4 โดยให้ n = 1 ดังต่อไปนี้.

บทนิยาม 5: ให้ D เป็นเซตใดๆ และ $R \subseteq D$ คือความสัมพันธ์เอกภาคใดๆบนเซต D. ถ้า $B \subseteq D$ มีสมบัติที่ว่า

สำหรับทุก $y \in D$, ถ้า $y \in R$, จะได้ $y \in B$,

นั่นคือ $R \subseteq B$, เราจะกล่าวว่าเซต B **มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์เอกภาค R** (closed under unary relation R).

หรือกล่าวอย่างง่ายที่สุดคือ ถ้าให้ $R \subseteq D$, เราจะกล่าวว่าเซต $B \subseteq D$ *มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ R* ถ้า B เป็นซูเปอร์เซตของ R.

ให้สังเกตว่า ถ้า R เป็นความสัมพันธ์เอกภาคบนเซต D, เซต D ย่อมมีสมบัติปิดภายใต้ R โดยอัตโนมัติ เพราะ $R \subseteq D$ โดยนิยามอยู่แล้ว.

ตัวอย่าง 6: ให้ D = {1,2,3,4,5}, R = {2,4}, A = {1,2,5}, และ B = {2,3,4}, และ C = {2,4,6}. จงพิจารณาสมบัติปิดของเซต A, B, และ C ภายใต้ความสัมพันธ์เอกภาค R บนเซต D.

<u>*วิธีทำ*</u> เนื่องจาก A ไม่ใช่ซูเปอร์เซตของ R ดังนั้น A ไม่มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ R. แต่ B เป็นซูเปอร์เซตของ R ดังนั้น B มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ R.

ถึงแม้ว่า C จะเป็นซูเปอร์เซตของ R แต่ในบริบทนี้เราไม่อาจกล่าวได้ว่า C มีสมบัติปิดภายใต้ความสัมพันธ์ R ได้เพราะ R ถูกมองเป็นความสัมพันธ์เอกภาคบนเซต D แต่ C มิได้เป็นสับเซตของ D.

❑

2.5 จำนวนเต็มกับการหารลงตัว

ระบบจำนวนเต็มเป็นส่วนหนึ่งของสาขาใหญ่สาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า **ทฤษฎีจำนวน** (number theory). ระบบจำนวนเต็มเป็นโครงสร้างแบบเต็มหน่วย (discrete structure) อย่างหนึ่งที่มีการประยุกต์ใช้อย่างสำคัญยิ่งในศาสตร์คอมพิวเตอร์ เช่นเรื่องของการคำนวณในระบบคอมพิวเตอร์ (computer arithmetic), การเข้ารหัสลับของข้อมูล (data encryption), และการบีบข้อมูล (data compression) เป็นต้น. เรื่องราวของระบบจำนวนเต็มและทฤษฎีจำนวนล้วนมีรากฐานมาจากมโนทัศน์ของ**การหารลงตัว** (divisibility) และ**การหารไม่ลงตัว** (indivisibility) ระหว่างจำนวนเต็มทั้งสิ้น.

เนื่องจากผู้อ่านส่วนใหญ่ได้ศึกษาเรื่องจำนวนเต็มกับการหารลงตัวมาบ้างแล้วในระดับมัธยม หัวข้อนี้จึงเป็นเพียงการทบทวนมโนทัศน์และความจริงขั้นพื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องนี้เท่านั้น. แต่จุดประสงค์ที่แท้จริงของหัวข้อนี้คือเพื่อใช้ทฤษฎีบทพื้นฐานต่างๆเกี่ยวกับเรื่องจำนวนเต็มกับการหารลงตัวเป็นตัวอย่างของเทคนิคการพิสูจน์ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ในบทที่ 3.

การหารลงตัว (divisibility)

จำนวนเต็มไม่มีสมบัติปิดภายใต้การหาร นั่นคือเมื่อจำนวนเต็มตัวหนึ่งหารด้วยจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์อีกตัวหนึ่ง ผลลัพธ์ที่ได้อาจเป็นจำนวนเต็มหรือไม่ใช่จำนวนเต็มก็ได้. เราเรียกกรณีที่ผลลัพธ์ของการหารเป็นจำนวนเต็มว่าเป็น**การหารลงตัว**. ดังนั้นเรานิยามการหารลงตัวดังต่อไปนี้:

บทนิยาม 1: **การหารลงตัว** (divisibility)

ให้ n และ d เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $d \neq 0$. ถ้ามีจำนวนเต็ม q ซึ่ง n = qd, เรากล่าวว่า **d หาร n ลงตัว** (d divides n) หรือ **n หารด้วย d ลงตัว** (n is not divisible by d) หรือ *d เป็น**ตัวประกอบ** (factor) ของ n* หรือ *n เป็น**พหุคูณ** (multiple) ของ d*, และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $d \mid n$.

ถ้าไม่มีจำนวนเต็ม q ใดที่ทำให้ n = qd เราจะกล่าวว่า **d หาร n ไม่ลงตัว** หรือ **n หารด้วย d ไม่ลงตัว** ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $d \nmid n$.

ตัวอย่างเช่น

3 หาร 18 ลงตัวเพราะมีจำนวนเต็ม 6 ซึ่ง $6 \cdot 3 = 18$,

-3 หาร 15 ลงตัวเพราะมีจำนวนเต็ม -5 ซึ่ง $(-5) \cdot (-3) = -15$,

1 หาร 8 ลงตัวเพราะมีจำนวนเต็ม 8 ซึ่ง $8 \cdot 1 = 8$, และ

-2 หาร 0 ลงตัวเพราะมีจำนวนเต็ม 0 ซึ่ง $0 \cdot (-2) = 0$ เป็นต้น.

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นความจริงที่น่าสนใจเกี่ยวกับหารลงตัว ซึ่งเราจะใช้บางบทเป็นตัวอย่างแสดงเทคนิคการพิสูจน์ในบทต่อไป.

ทฤษฎีบท 1: จำนวนเต็มทุกตัวหาร 0 ลงตัว

ทฤษฎีบท 2: 1 หารจำนวนเต็มทุกตัวลงตัว

ทฤษฎีบท 3: ให้ a, b, และ d เป็นจำนวนเต็มใดๆ. จะได้

1. ถ้า $d \mid a$, จะได้ $d \mid ak$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม k.
2. ถ้า $d \mid a$ และ $a \mid b$, จะได้ $d \mid b$.
3. ถ้า $d \mid a$ และ $d \mid b$, จะได้ $d \mid (pa+qb)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม p และ q.

อนึ่ง เราใช้มโนทัศน์ของ*การหารลงตัว*มานิยาม*จำนวนคู่*และ*จำนวนคี่*ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2: เราเรียกจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัวว่า**จำนวนคู่** (even number) และเรียกจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ไม่ลงตัวว่า**จำนวนคี่** (odd number).

จำนวนเฉพาะ (Prime)

มโนทัศน์เกี่ยวกับการหารลงตัวทำให้เราแบ่ง*จำนวนเต็มบวก*ได้เป็น 3 กลุ่ม คือกลุ่มของจำนวนเต็มที่มี*ตัวประกอบบวก* (positive factor) เพียงตัวเดียว, กลุ่มที่มีตัวประกอบบวกเพียงสองตัว, และกลุ่มที่มีตัวประกอบบวกมากกว่าสองตัว. เมื่อพิจารณาดูจะพบว่ากลุ่มแรกจะมีเพียงตัวเดียวคือ 1 ซึ่งมีตัวประกอบบวกเพียงตัวเดียวคือตัวมันเอง. เราเรียกจำนวนเต็มบวกกลุ่มที่สองและกลุ่มที่สามว่า**จำนวนเฉพาะ** (prime) และ**จำนวนประกอบ** (composite) ตามลำดับ ดังบทนิยามต่อไปนี้:

บทนิยาม 3: เราเรียกจำนวนเต็มบวก p ใดๆ ที่มากกว่า 1 ว่า**จำนวนเฉพาะ** (prime) ถ้าตัวประกอบบวกของ p มีเพียง 1 กับ p เท่านั้น. และเรียกจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะว่า**จำนวนประกอบ** (composite).

ตัวอย่างเช่น จำนวนเฉพาะ 10 ตัวแรกคือ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, และ 29, และจำนวนประกอบ 10 ตัวแรกคือ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, และ 18.

เนื่องจากเซตจำนวนเต็มบวกมีสมบัติปิดภายใต้การคูณ ดังนั้นผลคูณของจำนวนเฉพาะเป็นจำนวนเต็มบวกเสมอ เช่น $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$. ในกรณีนี้เรากล่าวว่า 28 มี**ตัวประกอบเฉพาะ** (prime factor) ทั้งหมด 3 ตัวคือ 2, 2, และ 7. ตัวประกอบเฉพาะของจำนวนเต็ม n ใดๆ ก็คือตัวประกอบของ n ที่เป็นจำนวนเฉพาะนั่นเอง. ทฤษฎีบทต่อไปนี้บอกเราว่าจำนวนเฉพาะเป็น "อิฐบล็อก" ที่ใช้สร้างจำนวนเต็มบวกทุกตัวที่มากกว่า 1.

ทฤษฎีบท 4: **ทฤษฎีบทหลักมูลของเลขคณิต** (Fundamental Theorem of Arithmetic)

จำนวนเต็มบวก n ทุกตัวที่มากกว่า 1 สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ k ตัวคือ

$n = p_1 p_2 \ldots p_k$ โดยที่ $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$ และ $k \geq 1$

และเขียนได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น. เราเรียกจำนวนเฉพาะ p_i, $1 \leq i \leq k$, แต่ละตัวว่าเป็น**ตัวประกอบเฉพาะ** (prime factor) ของ n และเรียกสมการ $n = p_1p_2...p_k$ ว่า**การแยกตัวประกอบเฉพาะ** (prime factorization) ของ n.

บทพิสูจน์: เราจะใช้การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้เป็นตัวอย่างการพิสูจน์ในบทต่อไป.

ทฤษฎีบทนี้ทำให้เราทราบว่าการเขียน 28 เป็นผลคูณของตัวประกอบเฉพาะที่เรียงจากน้อยไปมากคือ $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$ ทำได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น. ตัวอย่างอื่นๆของการแยกตัวประกอบเฉพาะได้แก่

$13 = 13$

$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$

$101 = 101$

$37944 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 31 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 31$

$3021377 = 3021377$

เป็นต้น. สังเกตว่าจำนวนเฉพาะทุกตัวจะมีตัวประกอบเฉพาะเพียงตัวเดียวคือตัวมันเอง.

อนึ่ง ขั้นตอนวิธีในการทดสอบว่าจำนวนเต็มบวกใดเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ และขั้นตอนวิธีในการแยกตัวประกอบเฉพาะเป็นที่สนใจในวงการคณิตศาสตร์ตั้งแต่สมัยกรีกโบราณจนถึงปัจจุบันและมีการประยุกต์ใช้อย่างสำคัญใน*วิทยาการเข้ารหัสลับ* (cryptography) แต่เราจะยังไม่กล่าวถึงเรื่องเหล่านี้ในที่นี้.

ผลหารและเศษเหลือของการหาร

ในหัวข้อย่อยนี้เราจะสนใจการหารจำนวนเต็มในกรณีที่ตัวหารเป็นจำนวนเต็มบวก. เราทราบว่า 5 หาร 13 ไม่ลงตัวเพราะไม่มีจำนวนเต็ม q ใดที่ทำให้ $q \cdot 5 = 13$ ได้. ในกรณีนี้จำนวนเต็มที่คูณกับ 5 แล้วใกล้เคียง 13 ที่สุดทางซ้ายและทางขวาคือ 2 และ 3 ตามลำดับ. นั่นคือเราได้ $13 = 2 \cdot 5 + 3$ และ $13 = 3 \cdot 5 - 2$. โดยทั่วไปเราจะสนใจเฉพาะในกรณีที่เศษเหลือมีค่าเป็นบวกเท่านั้น ดังนั้นเราจะยึดตามกรณีแรกโดยกล่าวว่า “13 หารด้วย 5 ได้ผลหาร 2 และเศษเหลือ 3”. เราจึงให้นิยามอย่างเป็นทางการของผลหารและเศษเหลือดังนี้.

บทนิยาม 4: ให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ d เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ. ถ้า $a = qd + r$ โดยที่ q และ r เป็นจำนวนเต็มและ $0 \leq r < d$, เราจะกล่าวว่า ***a หารด้วย d ได้ผลหาร q และเศษเหลือ r***. เราเรียก a ว่า**ตัวตั้ง** (dividend), เรียก d ว่า**ตัวหาร** (divisor), เรียก q ว่า**ผลหาร** (quotient), และเรียก r ว่า**เศษเหลือ** (remainder).

ให้สังเกตว่าเศษเหลือที่เรานิยามในบทนิยามข้างบนจะต้องไม่เป็นค่าลบและต้องน้อยกว่าตัวหารเสมอ.

ทฤษฎีบทเก่าแก่ต่อไปนี้ยืนยันว่า เมื่อเราหารจำนวนเต็มตัวหนึ่งด้วยจำนวนเต็มบวกอีกตัวหนึ่ง จะได้ผลหารและเศษเหลือเพียงแบบเดียวเท่านั้น.

ทฤษฎีบท 5: **ทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหาร** (division algorithm theorem)

ให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ d เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ. จะมีจำนวนเต็ม q และ r โดย $0 \leq r < d$ เพียงคู่เดียวเท่านั้นที่ทำให้ a = qd + r.

บทพิสูจน์: เราจะใช้การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้เป็นตัวอย่างการพิสูจน์ในบทต่อไป.

อันที่จริงแล้ว สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆที่เป็นตัวตั้งและจำนวนเต็มบวก d ใดๆที่เป็นตัวหาร จะมีจำนวนเต็ม m และ n จำนวนนับไม่ถ้วนที่ทำให้ a = md+n แต่ทฤษฎีบท 5 กล่าวว่าจะมีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง $0 \leq r < d$ *เพียงคู่เดียวเท่านั้น*ที่ทำให้ a = qd + r และจากบทนิยาม 4 เราเรียก q และ r นี้ว่า*ผลหาร*และ*เศษเหลือ*ตามลำดับ.

อนึ่ง ให้สังเกตว่าเศษเหลือ r ในทฤษฎีบท 5 อาจมีค่าเป็น 0 ได้ ซึ่งในกรณีเช่นนี้เราได้ a = qd ซึ่งมีความหมายว่า d หาร a ลงตัวนั่นเอง. ดังนั้น *การหารลงตัว* ก็คือ *การหารที่ได้เศษเหลือเป็น 0* และ *การหารไม่ลงตัว* ก็คือ *การหารที่ได้เศษเหลือไม่เท่ากับ 0* นั่นเอง.

ตัวอย่าง 1: จงหาผลหารและเศษเหลือของการหาร -13 ด้วย 5 และการหาร -27 ด้วย 3.

<u>*วิธีทำ*</u> จำนวนเต็มที่คูณกับ 5 แล้วใกล้เคียง −13 ที่สุดทางซ้ายและทางขวาคือ −3 และ −2 ตามลำดับ นั่นคือเราได้ −13 = (-3)5 + 2 และ −13 = (-2)5 − 3. แต่เนื่องจากเศษเหลือจะต้องเป็นค่าบวกหรือศูนย์ดังนั้นเราจึงใช้สมการแรก นั่นคือได้ผลหารเป็น −3 และเศษเหลือเป็น 2. เนื่องจากเศษเหลือไม่เป็นศูนย์ เรากล่าวว่า 5 หาร −13 ไม่ลงตัว.

เนื่องจาก −27 = (−9)3 + 0 เราได้ผลหารเป็น −9 และเศษเหลือเป็น 0. ดังนั้น 3 หาร −27 ลงตัว.

❑

เมื่อเรามั่นใจแล้วว่าการหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็มบวกจะได้ผลหารและเศษเหลือเพียงแบบเดียวเท่านั้น เราจะนิยามสัญลักษณ์ที่ใช้แทนผลหารและเศษเหลือดังนี้:

บทนิยาม 5: เมื่อเราหารจำนวนเต็ม a ใดๆ ด้วยจำนวนเต็มบวก d ใดๆ เราเขียนแทน*ผลหาร*ด้วย **a div d** และเขียนแทน*เศษเหลือ*ด้วย **a mod d**.

ตัวอย่างเช่น –13 div 5 = -3 และ –13 mod 5 = 2 ในขณะที่ 27 div 3 = 9 และ 27 mod 3 = 0. เรากล่าวได้ว่า *d หาร a ลงตัวเมื่อและต่อเมื่อ a mod d = 0.*

การสมภาคกันของจำนวนเต็ม (Congruence)

หัวข้อย่อยนี้จะนิยามมโนทัศน์ที่เป็นพื้นฐานสำคัญของทฤษฎีจำนวน นั่นคือ*การสมภาคกันของจำนวนเต็มสองตัว* ดังบทนิยามต่อไปนี้:

บทนิยาม 6: ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ และให้ d เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ. ถ้า d หาร a−b ลงตัว เรากล่าวว่า **a สมภาคกับ b มอดุโล d** (a is congruent to b modulo d) เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{d}$. ถ้า *a ไม่สมภาคกับ b มอดุโล d* (นั่นคือ d หาร a−b ไม่ลงตัว) เราเขียนว่า $a \not\equiv b \pmod{d}$.

ตัวอย่างเช่น $5 \equiv -1 \pmod 3$ เพราะ 3 หาร 5-(-1) = 6 ลงตัว แต่ $5 \not\equiv 7 \pmod 3$ เพราะ 3 หาร 5-7 = -2 ไม่ลงตัว. ทฤษฎีบทต่อไปนี้ให้ความหมายที่ชัดเจนขึ้นของการสมภาคกันของจำนวนเต็ม.

ทฤษฎีบท 6: ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ d เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ. จะได้

$a \equiv b \pmod d$ เมื่อและต่อเมื่อ a mod d = b mod d.

บทพิสูจน์: เราจะใช้การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้เป็นตัวอย่างการพิสูจน์ในบทต่อไป.

ทฤษฎีบทข้างบนทำให้เราทราบว่า ความหมายของ "a สมภาคกับ b มอดุโล d" ก็คือ เศษเหลือของ a หารด้วย d เท่ากับเศษเหลือของ b หารด้วย d นั่นเอง.

บทนิยาม 6 และทฤษฎีบท 6 ทำให้เราได้วิธีตรวจสอบว่า*จำนวนเต็ม a และ b สมภาคมอดุโล d กันหรือไม่*สองวิธี. วิธีแรกคือตรวจสอบว่า d หาร (a-b) ลงตัวหรือไม่ และวิธีที่สองคือตรวจสอบว่า a mod d เท่ากับ b mod d หรือไม่.

ตัวอย่าง 2: จงตรวจสอบว่า 253 สมภาคกับ 199 มอดุโล 6 หรือไม่.

วิธีทำ เราตรวจสอบได้ 2 วิธี. วิธีแรกคือใช้นิยามของการสมภาคกันในบทนิยาม 6. เนื่องจาก 6 หาร 253-199 = 54 ลงตัว ดังนั้น $253 \equiv 199 \pmod 6$.

วิธีที่สองคือใช้ทฤษฎีบท 6. เนื่องจาก $253 = 42 \cdot 6 + 1$ และ $199 = 33 \cdot 6 + 1$ ดังนั้น 253 mod 6 = 199 mod 6 = 1 ดังนั้น $253 \equiv 199 \pmod 6$.

❑